

Corso di Docimologia
Docente: Prof. Roberto Trincherò
PAS – A049

**ANALISI DI UNA PROVA DI VALUTAZIONE
DI MATEMATICA SULLE DERIVATE**

Specializzando: Matteo Torre

A.A. 2013-2014

Sommario

OBIETTIVI DIDATTICI	3
Obiettivi generali:	3
Obiettivi specifici di apprendimento:	3
Prerequisiti:.....	3
OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO e indicatori di avvenuto raggiungimento	4
La PROVA	6
DESTINATARI della prova.....	8
TIPOLOGIA e STRUTTURA della prova.....	8
Accorgimenti adottati nella somministrazione della prova	9
CRITERI e GRIGLIA di VALUTAZIONE.....	10
RESOCONTO DELLA SOMMINISTRAZIONE DELLA PROVA.....	12
ANALISI dei DATI EMERSI dalla SOMMINISTRAZIONE della PROVA	12
Indici di tendenza degli item	15
Analisi degli item	16
Commento sull'analisi degli item.....	20
INDICAZIONI per il RECUPERO	21
AUTORIFLESSIONE	22

OBIETTIVI DIDATTICI

Vengono riportati gli obiettivi didattici, suddivisi in obiettivi generali e specifici, dell'unità di apprendimento sul calcolo differenziale delle funzioni composte e loro applicazioni alla fisica proposta nell'anno scolastico 2013-2014 ad una classe V Liceo Scientifico del corso di Ordinamento.

Obiettivi generali:

- Imparare ad utilizzare il linguaggio specifico e la sintassi matematica del calcolo differenziale;
- Imparare a costruire le derivate successive di una funzione;
- Saper lavorare sia sull'aspetto analitico che grafico delle funzioni e delle loro derivate;
- Saper utilizzare le abilità acquisite in altri ambiti matematici e in contesti reali.

Obiettivi specifici di apprendimento:

1. Conoscere e saper applicare le regole di derivazione per le funzioni composte;
2. Saper descrivere geometricamente nel piano cartesiano la derivata di una funzione;
3. Saper ricavare analiticamente la derivata da informazioni sulla funzione e viceversa;
4. Saper interpretare i punti notevoli di una funzione e metterli in relazione al grafico della sua derivata prima e seconda;
5. Saper passare dal grafico della funzione a quello della derivata e viceversa;
6. Saper interpretare alcuni fenomeni fisici elementari alla luce del calcolo differenziale.

Si riportano i prerequisiti necessari all'unità di apprendimento considerata.

Prerequisiti:

- Saper risolvere sistemi di equazioni e disequazioni algebriche;
- Saper calcolare il dominio di una funzione composta;
- Saper disegnare le principali funzioni semplici;
- Saper calcolare le regole di derivazione per le funzioni semplici;
- Conoscere il significato di punti stazionari e punti di flesso di una funzione;
- Conoscere il significato di legge oraria, velocità, accelerazione di un punto materiale.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO e indicatori di avvenuto raggiungimento

<i>Obiettivi di apprendimento</i>	<i>Classificazione di Anderson & Krathwohl</i>	<i>Indicatori/descrittori</i>	<i>Item</i>
Conoscere e saper applicare le regole di derivazione per le funzioni composte	Ricordare (riconoscere) Comprendere (interpretare)	Lo studente ricorda le regole del calcolo differenziale per le funzioni elementari e le sa applicare alle funzioni composte; Lo studente ricorda le regole di derivazione; Lo studente sa applicare la regola per la derivata delle funzione	1, 2, 3, 4, 6, 10
Saper descrivere geometricamente nel piano cartesiano la derivata di una funzione	Ricordare (riconoscere) Comprendere (interpretare, spiegare, confrontare, esemplificare)	Lo studente sa individuare il dominio e il codominio della derivata prima e seconda; Lo studente sa tracciare il grafico della derivata prima di una funzione a partire dai suoi punti notevoli; Lo studente sa tracciare il grafico della derivata seconda di una funzione a partire dai suoi punti notevoli; Lo studente riconosce geometricamente gli zeri di una funzione e ne sa spiegare il significato all'interno del calcolo differenziale.	
Saper ricavare analiticamente la derivata da informazioni sulla funzione e viceversa	Analizzare (organizzare) Comprendere (confrontare, inferire, esemplificare) Valutare (controllare) Creare (generare)	Lo studente sa interpretare analiticamente gli zeri di una funzione e spiegare il significato all'interno del calcolo differenziale; Lo studente sa interpretare gli zeri di una derivata e spiegare il loro significato relativo alla funzione primitiva; Lo studente riconosce il significato della monotonia di una funzione e sa spiegare a parole e disegnare le sue relazioni	3, 4, 5, 7, 8, 9

		<p>con la derivata prima e seconda;</p> <p>Lo studente sa comprendere il significato dell'andamento asintotico di una funzione e spiegare con parole proprie il significato.</p>	
<p>Saper interpretare i punti notevoli di una funzione e metterli in relazione al grafico della sua derivata prima e seconda</p>	<p>Analizzare (organizzare) Comprendere (confrontare, inferire, esemplificare) Valutare (controllare) Creare (generare)</p>	<p>Lo studente sa trovare algebricamente i punti di massimo e di minimo di una funzione composta;</p> <p>Lo studente sa trovare i punti di cambio di concavità di una funzione composta;</p> <p>Lo studente verifica graficamente la congruenza delle soluzioni ottenute algebricamente;</p> <p>Lo studente interpreta la funzione composta riconoscendo le singole funzioni e le loro proprietà.</p>	<p>4, 5, 6, 7, 8, 9</p>
<p>Saper passare dal grafico delle funzione a quello della derivata e viceversa</p>	<p>Analizzare (organizzare) Comprendere (confrontare, inferire, esemplificare) Valutare (controllare) Creare (generare)</p>	<p>Lo studente interpreta le informazioni delle singole funzioni che compongono la funzione e attribuisce loro un preciso significato nel grafico della funzione composta assegnata;</p> <p>Lo studente riconosce nel grafico della funzione e della derivata un andamento riferibile a modelli matematici noti</p>	<p>3, 4, 5, 7, 8, 9</p>
<p>Saper interpretare alcuni fenomeni fisici elementari alla luce del calcolo differenziale</p>	<p>Comprendere (confrontare, interpretare, inferire) Applicare (eseguire) Ricordare (rievoicare)</p>	<p>Lo studente riesce ad applicare le regole di derivazione in ambito fisico per il calcolo della velocità e dell'accelerazione a partire dalla legge oraria del moto;</p> <p>Lo studente ricorda le principali formule della cinematica e le interpreta in ambito del calcolo differenziale.</p>	<p>10</p>

La PROVA

Nel seguito si riporta il testo della verifica.

Lo studente risolva i seguenti quesiti. (È consentito l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile)

1. Calcola la derivata delle seguenti funzioni applicando le regole di derivazione:

a. $f(x) = \frac{x^3+2x+1}{x^2-1}$

b. $f(x) = \ln x + x^{-2}$

c. $f(x) = \frac{e^x+2x}{x^3}$

2. Calcola la derivata delle seguenti funzioni composte:

a. $f(x) = \sin(5x^2 + 6x - 2)$

b. $f(x) = e^{\sqrt{\cos x}}$

c. $f(x) = \sqrt{x^3 + x} - \sqrt[3]{(x - x^4)^2}$

3. Perché non si può calcolare la derivata della seguente funzione $g(x) = \sqrt{\ln(\sin x)}$?
Motiva la tua risposta.

4. Data la funzione $f(x) = 2x^3 + 4$, traccia il suo grafico e nello stesso piano cartesiano (magari utilizzando colori diversi) traccia il grafico di $f'(x)$ e di $f''(x)$. Descrivi, con parole tue, il grafico delle tre funzioni analizzandone i punti caratteristici e gli eventuali legami.

5. Indica almeno tre caratteristiche (grafiche, analitiche, algebriche,...) che intercorrono tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata prima.

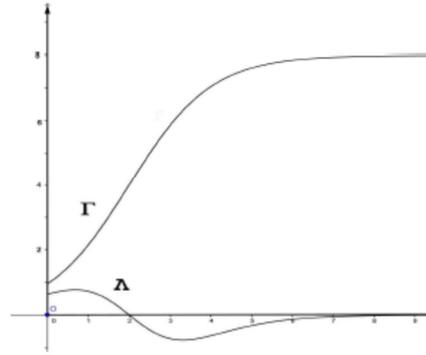
6. Data la funzione $f(x) = x \ln^2 x$ trova i suoi eventuali punti di massimo o di minimo e indica se sono assoluti o relativi.

7. Si disegni il grafico di una funzione la cui derivata prima sia negativa e la cui derivata seconda sia positiva.

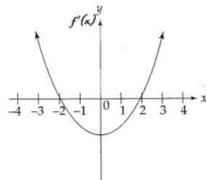
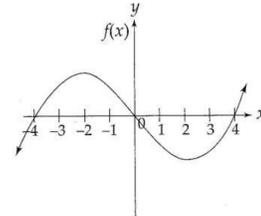
8. Una funzione $f(x)$ è definita continua insieme alle sue funzioni derivata prima e seconda e ha dominio $[0; +\infty)$ e nella figura di destra sono disegnati i grafici Γ e Λ rispettivamente di $f(x)$ e $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate

$(2;4)$, passa per $(0;0)$ mentre le rette $y=2$ e $x=4$ sono rispettivamente asintoti orizzontali per $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$.
Lo studente dimostri che:

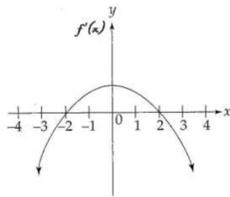
- La funzione $f(x)$ derivata prima della funzione $F(x)$ ha un massimo e ne determini le coordinate;
- Sapendo che per ogni x del dominio vale $f(x) = F'(x)$, qual è il possibile andamento di $F(x)$?



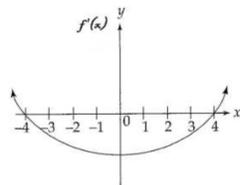
9. Se la figura a lato rappresenta il grafico della funzione $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.



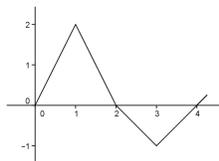
a)



b)



c)



d)

10. Un corpo di massa 50 grammi si muove di moto rettilineo secondo la legge oraria $s = 2t^2 - 3t$ dove s è espresso in metri e t in secondi. Calcola l'energia cinetica del corpo dopo un tempo $t = 3$ s.

DESTINATARI della prova

La prova di valutazione in questione è stata somministrata a una classe V Liceo Scientifico del corso di Ordinamento (ovvero, tradizionale) dove io stesso insegno, al termine dell'unità di apprendimento relativa al calcolo delle derivate di funzioni composte e delle loro applicazioni in ambito fisico. L'unità di apprendimento è stata svolta in classe durante il mese di Febbraio 2014 per una durata di 5 ore curriculari suddivise tra spiegazione frontale, lezione dialogata, esercizi svolti dal docente e esercizi svolti individualmente dagli alunni e guidati dagli alunni più meritevoli.

La classe esaminata è formata da 18 alunni di cui 11 maschi e 7 femmine tra cui ci sono due alunni ripetenti. Dal punto di vista disciplinare la classe risulta essere abbastanza gestibile per quanto riguarda la condotta, ma non altrettanto per quanto riguarda la puntualità nelle consegne e l'assunzione delle proprie responsabilità: non sempre la maggior parte degli studenti svolge regolarmente i compiti assegnati e talvolta durante le prove di verifica risultano esserci diversi assenti. Durante lo svolgimento di questa prova, infatti, erano assenti 3 alunni.

Come si potrà notare successivamente dall'analisi dei dati della somministrazione della prova alcuni alunni non riescono a raggiungere gli obiettivi minimi a causa delle loro lacune pregresse in matematica, alle quali si aggiunge uno studio discontinuo e superficiale. Per tali motivi, dopo l'esito della suddetta prova per tali alunni è stato attivato un corso di recupero in itinere oltre ad attività di consolidamento e di studio assistito con un altro docente dell'istituto, al fine di garantire il almeno raggiungimento degli obiettivi minimi utili per l'accesso all'esame di stato.

TIPOLOGIA e STRUTTURA della prova

Lo scopo di questa prova è quello di valutare le abilità dello studente di utilizzare le regole di derivazione delle funzioni semplici e composte sia nell'ambito del registro analitico che in quello geometrico e grafico. Allo studente viene, inoltre, richiesto, di saper facilmente passare da un registro e di interpretare fenomeni fisici alla luce del calcolo differenziale.

Quasi tutti gli item della prova prevedono che lo studente abbia una buona conoscenza teorica dei concetti affrontati (fino a quella data) durante tutto l'anno scolastico, nonché che sia in grado di esporli sinteticamente (anche usando parole proprie) e di utilizzarli anche in ambiti non comunemente affrontati a lezione. Allo studente, quindi, non viene soltanto richiesto di eseguire procedure, ma di applicare concetti teorici in contesti complessi anche correlati alla fisica. Entriamo nel dettaglio di ciascun item.

Gli item 1, 2, 5 sono di tipo teorico e permettono di valutare il livello di conoscenza dei concetti coinvolti (regole di derivazione, derivata delle funzioni composte e significato geometrico della derivata prima e seconda di una funzione) sia attraverso esercizi canonici di calcolo, sia tramite un'esposizione sintetica (item 5) la quale consente, inoltre, una valutazione del lessico specifico.

Gli item 3 ed 8 uniscono molti aspetti teorici correlati sia alle derivate sia relativi agli argomenti di analisi e quindi consentono di valutare come lo studente riesce a organizzare le proprie conoscenze. In particolare, l'item 3 non deve essere risolto (come gli item 1 e 2) semplicemente eseguendo una

procedura, ma richiede che lo studente stia attento al dominio della funzione, ovvero prima di eseguire la derivata di una funzione è necessario valutarne il dominio. L'item 8 vuole, invece, avvicinare gradualmente lo studente a un problema che potrebbe essere presente nella seconda prova dell'Esame di Maturità (infatti è stato estrapolato dal testo della maturità dello scorso anno scolastico 2012-2013) dove le conoscenze teoriche si uniscono a quelle pratico-geometriche per creare la funzione.

Gli item 4, 6 e 7 (oltre al già citato item 8) consentono di valutare la capacità di applicare i concetti teorici per ricavarne aspetti geometrici legati sia al grafico della funzione che a quello delle sue derivate prima e seconda.

L'item 9 è puramente geometrico e vuole valutare la capacità dello studente di riconoscere le proprietà grafiche della funzione e delle sue derivate. Anche questo item (estrapolato da una prova di Maturità) unisce diverse conoscenze e ambisce a far interpretare una funzione a partire dal suo aspetto grafico nonché a produrre ragionamenti di matematica avanzata (per una V liceo scientifico).

L'item 10 permette di valutare le capacità dello studente di utilizzare il calcolo differenziale nell'ambito della fisica e, in particolare, della cinematica nonché di interpretare i fenomeni fisici alla luce del concetto di limite e di derivata. Nell'item è, inoltre, richiesto allo studente di ricordare la formula dell'energia cinetica.

Accorgimenti adottati nella somministrazione della prova

La prova è stata somministrata, come già detto in precedenza, in una classe V Liceo Scientifico del corso di Ordinamento (ovvero, tradizionale) nella seconda metà del mese di Febbraio 2014 e al termine dell'unità di apprendimento relativa al calcolo differenziale e alle derivate di funzioni composte.

Il giorno della prova erano presenti 15 ragazzi (su un totale di 18). È stata somministrata per tutti la stessa prova, dopo aver disposto i banchi in maniera da lasciare uno spazio adeguato tra di essi per potervi passare durante lo svolgimento e per evitare che gli alunni si scambiassero informazioni.

Dopo aver consegnato la prova è stato letto e commentato il testo, chiarendo gli eventuali dubbi e fornendo alcuni suggerimenti per un corretto iter di svolgimento di alcuni item della prova stessa, così come si può fare nell'ambito della seconda prova dell'Esame di Maturità. Ovviamente, questi suggerimenti non fornivano le tecniche risolutive, ma evidenziavano agli alunni alcuni punti critici e alcuni ostacoli concettuali presenti in alcuni item: in particolare, ci si è soffermati maggiormente sull'item 8, quello più insolito per la classe e quello (come tipologia) mai affrontato durante le lezioni.

CRITERI e GRIGLIA di VALUTAZIONE

Per la correzione della prova è stata utilizzata la griglia di valutazione che verrà utilizzata per la correzione della seconda prova dell'Esame di Maturità (suggerita nell'anno scolastico 2011-2012 dal Ministero dell'Istruzione) opportunamente adattata alle esigenze e alla strutturazione della verifica. Tale scelta è dovuta al fatto che ho voluto cominciare ad adattare i ragazzi allo stile di valutazione richiesto dal Ministero in maniera tale che ognuno di loro possa adattare il proprio studio almeno verso il pieno raggiungimento degli obiettivi minimi richiesti in sede di Esame di Maturità. L'aggiustamento che ho personalmente apportato è dovuto al fatto che la presente prova di valutazione riguarda soltanto una ristretta parte degli argomenti invece previsti e richiesti nella seconda prova dell'Esame di Maturità. Per tale motivo nell'aggiustamento ho ritenuto necessario alzare un po' l'asticella della sufficienza e andare oltre alle sole conoscenze di un argomento, nonostante la tabella del Ministero si fondi su una duplice valutazione (conoscenze-competenze) in cui però sarà ammesso che lo studente dimostri di possedere le conoscenze per raggiungere la sufficienza. Ovviamente, nel contesto della seconda prova di Maturità gli argomenti sono molti di più e la difficoltà degli item è nettamente maggiore degli item di questa prova di valutazione.

Nel seguito riporto la griglia di valutazione usata per la correzione con le indicazioni del peso valutativo assegnato a ciascun item.

ITEM	PUNTEGGIO			TOTALE
	Conoscenza	Correttezza	Completezza	
1	3	3	1	7
2	3	3	1	7
3	1	2	1	4
4	1	2	2	5
5	1	3	1	5
6	1	2	1	4
7	2	2	1	5
8	4	4	2	10
9	1	1	2	4
10	2	1	1	4
	19	23	13	55

Per trasformare il punteggio ottenuto dallo studente al voto da inserire nel registro, è stata utilizzata la seguente formula:

$$Voto = 3 + \frac{\text{somma punteggi} \times 7}{55}$$

dove la *somma punteggi* è pari alla somma dei punteggi ottenuti nei singoli item. Come si può notare dalla formula, il voto minimo (*somma punteggi* = 0) è 3 e il voto massimo è 10; tali scelte sono state prese in accordo con le indicazioni presenti nel POF della scuola per l'anno scolastico 2013-2014. Sempre analizzando la formula per tradurre il punteggio in voto, si può vedere che per raggiungere la sufficienza lo studente deve totalizzare punti: osservando i totali parziali appare evidente che questo risultato non può essere raggiunto esclusivamente con la conoscenza della

formula o delle procedure per tutti gli esercizi. In realtà è necessario svolgere correttamente almeno 6 esercizi, oppure completamente almeno 4 esercizi.

Per assegnare il voto finale, però, è necessario stabilire un ulteriore criterio in quanto il voto calcolato con la formula riportata qui sopra sarà, in generale, un numero con la virgola (del quale si troncherà la seconda cifra decimale). È stata adottata la seguente tabella di conversione:

$x = Voto = 3 + \frac{\text{somma punteggi} \times 7}{55}$	<i>Voto finale</i>
$n < x \leq n, 2$	n
$n, 2 < x \leq n, 4$	$n +$
$n, 4 < x \leq n, 6$	$n^{1/2}$
$n, 6 < x \leq n, 8$	$n/n+1$
$n, 8 < x \leq n + 1$	$n+1$

dove n è un numero intero compreso tra 3 e 10.

Prima di procedere vorrei entrare nel merito del significato delle tre colonne che costituiscono la griglia valutativa e che quindi concorrono a formare il punteggio complessivo. Nel seguito elencherò gli obiettivi che lo studente deve raggiungere per ottenere i punteggi assegnati a ciascun item, essi contengono implicitamente le differenziazioni di punteggio presenti da un esercizio all'altro:

- **Item 1:** lo studente ricorda le regole di derivazione per tutte le funzioni proposte (3 pt), le sa applicare correttamente a ciascuna funzione (3 pt) e completa lo svolgimento della funzione derivata prima eseguendo gli eventuali passaggi algebrici presenti in essa (1 pt).
- **Item 2:** lo studente ricorda le regole di derivazione delle funzioni composte per tutte le funzioni proposte (3 pt), le sa applicare correttamente a ciascuna funzione (3 pt) e completa lo svolgimento della funzione derivata prima eseguendo gli eventuali passaggi algebrici presenti in essa (1 pt).
- **Item 3:** lo studente ricorda che è necessario eseguire il dominio di una funzione prima di calcolarne la sua derivata (1 pt), quindi ne prova a calcolare il dominio e la derivata prima della funzione proposta (2 pt) e ne motiva il perché essa non si possa calcolare (1 pt).
- **Item 4:** lo studente sa calcolare applicando le formule la derivata prima e seconda della funzione (1 pt), sa tracciare i grafici di entrambe (2 pt) e riesce a metterli in relazione con il grafico della funzione assegnata (2 pt).
- **Item 5:** lo studente sa individuare la relazione tra il dominio della funzione e quello della sua derivata (1 pt), enuncia le principali caratteristiche legate alla continuità, monotonia, zeri, ... che legano i grafici di una funzione e della sua derivata prima (3 pt) e propone esempi e casi particolari (1 pt).
- **Item 6:** lo studente sa applicare le regole di derivazione per calcolare la derivata prima e seconda (1 pt) e dopo aver calcolato e studiato la derivata prima e seconda trova i massimi e minimi della funzione (2 pt), determina se si trattano di massimi o minimi relativi o assoluti (1 pt).
- **Item 7:** lo studente da un'indicazione sul possibile disegno del grafico della derivata prima e seconda e ne propone un possibile grafico (2 pt), riesce quindi a descrivere anche con parole

proprie l'andamento della relativa funzione e ne propone un possibile grafico (2 pt), discute della funzione e dei legami tra essa e la derivata prima e seconda proponendo esempi e controesempi (1 pt).

- **Item 8:** lo studente riesce a interpretare i dati del problema e associarli al grafico della derivata prima per trovare il dominio della funzione e dimostrare, anche con parole proprie, l'esistenza del massimo della funzione (2 pt). Lo studente riesce a ipotizzare, anche a parole, l'andamento della funzione (2 pt) e trova le coordinate del suo punto di massimo (2 pt), infine ipotizza l'andamento corretto della funzione (2 pt), svolgendo in maniera corretta e completa tutte le parti in cui è diviso l'item (3 pt).
- **Item 9:** lo studente individua il grafico corretto che corrisponde al grafico della derivata prima (1 pt) riuscendo a motivare anche con parole proprie le motivazioni della sua scelta (1 pt), quindi fornisce una risposta esaustiva e completa proponendo come eventuali controesempi le risposte non ritenute corrette (2 pt).
- **Item 10:** lo studente ricorda la formula dell'energia cinetica e i legami tra la legge oraria e la velocità come derivata prima di quest'ultima (2 pt), lo studente calcola correttamente la derivata prima della legge oraria (1 pt) e la usa per completare l'esercizio e trovare l'energia cinetica dell'oggetto (1 pt).

RESOCONTO DELLA SOMMINISTRAZIONE DELLA PROVA

Come già detto in precedenza, quando è stata somministrata la prova erano presenti 15 studenti su 18 ed esse è stata svolta in 100 minuti (infatti, i primi 10 minuti sono stati dedicati alla lettura e al commento della prova). Trattandosi di una classe abbastanza disciplinata, non ci sono stati problemi durante lo svolgimento della prova e la vigilanza del docente è stata agevolata dalla disposizione dei banchi. Nessun ragazzo ha cercato di scambiare informazioni con i compagni e tutti gli studenti hanno svolto la prova in un clima sereno e di relativo silenzio. Molti dei presenti hanno mantenuto alta la loro concentrazione, sfruttando al massimo il tempo a loro disposizione; quattro ragazzi (quelli che poi hanno riscontrato le valutazioni peggiori) hanno consegnato in anticipo rispetto al tempo massimo concesso e hanno eseguito un numero esiguo (e neppure completamente corretto) degli esercizi proposti. A questi studenti è stato concesso di recarsi fuori dall'aula (per un lasso di tempo comunque abbastanza contenuto) per svolgere in anticipo l'intervallo in maniera tale che evitassero di disturbare i loro compagni che stavano, in maniera seria e solerte, continuando a svolgere la prova. Tendenzialmente gli studenti non hanno risolto gli esercizi seguendo l'ordine proposto dalla prova ma, secondo le loro dichiarazioni all'atto della consegna della prova stessa, hanno scelto di svolgere prima gli esercizi su cui si sentivano più sicuri, lasciando poi per ultimi quelli a loro giudizio più complessi.

ANALISI dei DATI EMERSI dalla SOMMINISTRAZIONE della PROVA

Nella tabella della pagina seguente sono riportati i punteggi conseguiti da ciascuno studente relativamente ad ogni item. Nell'ultima colonna sono evidenziati i voti finali assegnati a ciascuno studente.

Studente	Item 1			Item 2			Item 3		
	Conoscenza	Correttezza	Completezza	Conoscenza	Correttezza	Completezza	Conoscenza	Correttezza	Completezza
S1	3	1	0	3	1	0	0	0	0
S2	3	2	0,5	2	2	0,5	1	1	0,5
S3	2	1	0	1	0	0	0	0	0
S4	2	0	0	1	1	0	1	0	0
S5	3	3	1	3	3	1	1	1	0,5
S6	3	2	0,5	2	2	0,5	1	2	1
S7	2	2	0,5	1	1	0	1	1	0,5
S8	1	1	0	0	0	0	0	0	0
S9	2	2	0,5	3	2	0,5	1	0	0
S10	3	2	0,5	3	3	1	1	2	1
S11	2	1	0	1	1	0	0	0	0
S12	2	2	0,5	2	2	0,5	1	0	0
S13	3	3	1	3	3	1	1	2	1
S14	3	3	1	3	2	0,5	1	2	1
S15	3	3	1	3	3	1	1	1	0,5

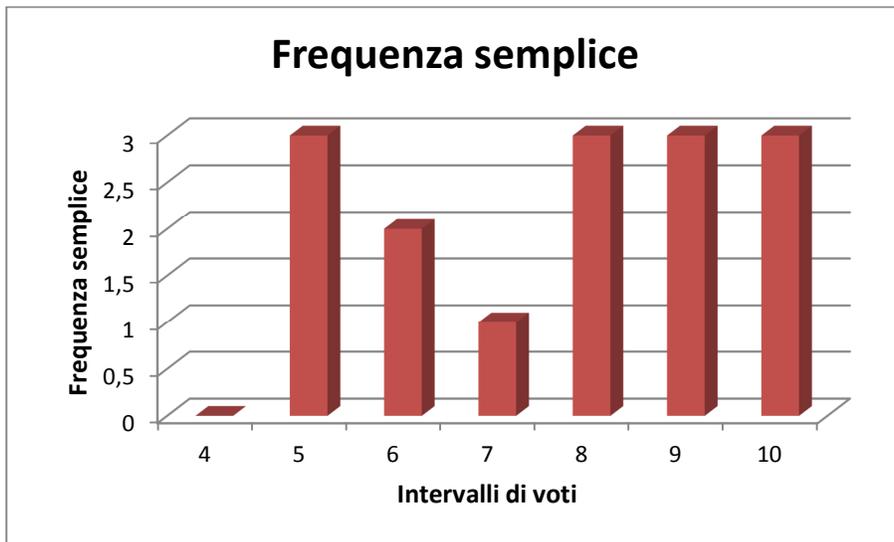
	Item 4			Item 5			Item 6		
	Conoscenza	Correttezza	Completezza	Conoscenza	Correttezza	Completezza	Conoscenza	Correttezza	Completezza
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0,5
1	2	2	1	1	2	0,5	1	1	0,5
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0,5
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	2	1	1	1	2	0,5	1	1	0,5
1	1	1	1	1	2	0,5	1	2	1
1	1	1	1	1	3	1	1	2	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0,5
1	2	2	1	2	2	0,5	1	1	0,5
1	1	1	1	1	2	0,5	1	2	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	2	0,5	1	2	1
1	2	2	1	3	1	1	1	2	1
1	2	2	1	3	1	1	1	2	0
1	2	2	1	3	1	1	1	2	0

	Item 7			Item 8			Item 9		
	Conoscenza	Correttezza	Completezza	Conoscenza	Correttezza	Completezza	Conoscenza	Correttezza	Completezza
1	1	0,5	2	2	1	0	0	0	0
1	0	0	2	2	1	1	1	1	0,5
2	1	0,5	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0,5	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0,5	2	2	1	1	1	1	0,5
2	1	0,5	2	2	1	1	1	2	1
1	1	0,5	2	2	1	1	1	1	0,5
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0,5	1	1	0	1	1	1	0,5
2	2	1	2	2	1	1	2	2	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0,5	2	2	1	1	2	2	0
2	2	1	4	2	1	1	2	2	0
2	2	1	4	2	1	1	2	2	1
2	2	1	4	2	1	1	2	2	0

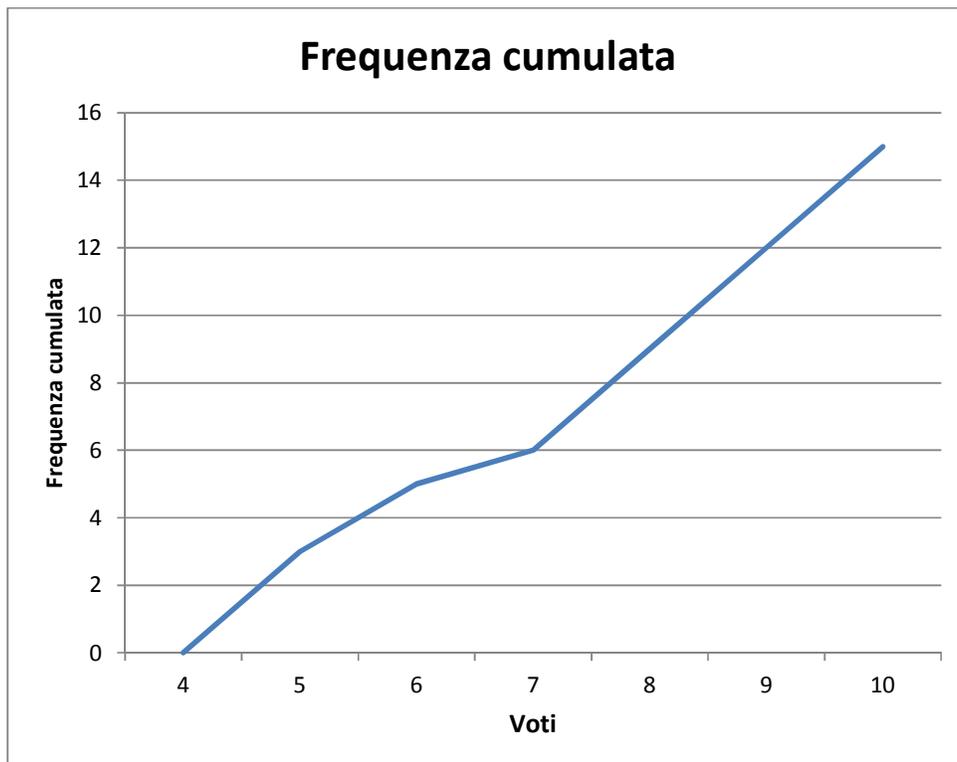
	Item 10			Totale	Voto	Voto Finale
	Conoscenza	Correttezza	Completezza			
0	0	0	23	5,93	6	
2	1	1	36	7,58	7 1/2	
0	0	0	15	4,91	5	
0	0	0	12,5	4,59	4 1/2	
1	1	0,5	40	8,09	8	
2	0	0	39	7,96	8	
2	1	1	35	7,45	7 1/2	
0	0	0	8,5	4,08	4	
0	0	0	29	6,69	6/7	
2	0	0	43	8,47	8 1/2	
0	0	0	11	4,40	4+	
2	1	0	34	7,33	7+	
2	1	1	51	9,49	9 1/2	
1	0	0	46,5	8,92	9	
2	0	0	46,5	8,92	9	

Dai risultati ottenuti (ultima colonna con dicitura “Voto finale”) si evince che la maggior parte dei presenti ha ottenuto un voto sufficiente e soltanto 4 studenti su 15 (pari al 26,6%) sono risultati insufficienti dei quali, però, 3 su 4 sono insufficienti gravi. Per essi verrà preparata una prova di recupero da svolgersi congiuntamente con quella prevista per gli studenti risultati assenti a questa prova di valutazione.

Il grafico che segue riporta le frequenze assolute dei voti raggruppati in classi di ampiezza 1.



Il seguente grafico mostra, invece, l'istogramma delle frequenze cumulate dei voti.



Nella tabella seguente sono riportate la media, la deviazione standard, la moda e la mediana relative ai voti:

Media	6,7
Moda	5 8 9 10
Mediana	7,5
Deviazione standard	2,5

Dai dati della tabella si evince che siccome la moda è molto variegata (e non è un valore unico) e è superiore alla media dei voti: questo implica che la distribuzione dei voti non è esattamente centrata attorno al valor medio, come si può notare dal grafico delle frequenze semplici. Inoltre, il valore della mediana (7,5) indica che più della metà degli studenti ha ottenuto un risultato molto soddisfacente, in particolare il 60% ha ottenuto un risultato maggiore o uguale a 7,5 su 10. Infatti, osservando il diagramma della frequenza cumulata si può notare come l'intervallo in cui cadono la maggior parte dei voti è quello compreso tra 7 e 10.

Indici di tendenza degli item

Nella tabella qui sotto sono riportati il punteggio massimo e minimo assegnati a ciascun item e in aggiunta la media, la moda, la mediana e lo scarto quadratico medio. Bisogna precisare che i punteggi massimo e minimo per ciascun item sono stati valutati sommando, sempre per ciascun item, i singoli punteggi ottenuti in *Conoscenza*, *Correttezza* e *Completezza*.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10
Punt. max	7,0	7,0	4,0	5,0	5,0	4,0	5,0	7,0	4,0	4,0
Punt. min	2,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	2,0	0,0	0,0
Media	4,8	4,2	1,9	3,2	3,1	2,9	3,1	4,4	2,1	1,6
Moda	7,0	7,0	0,0	3,0	3,5	2,5	2,5	5,0	0,0	0,0
Mediana	4,5	4,5	2,5	3,0	3,5	2,5	2,5	5,0	2,5	2,0
Sc.quad.	1,8	2,4	1,6	1,7	1,7	1,0	1,5	1,9	1,6	1,6

I dati di questa tabella mostrano come gli studenti abbiano trovato difficili gli item 3, 9 e 10 in quanto la moda è 0 e la mediana è abbastanza bassa rispetto al punteggio massimo previsto. Anche se analizzerò nel seguito le motivazioni di tali risultati, da un punto di vista esclusivamente statistico posso affermare che gli item 9 e 10 sono stati svolti per ultimi da almeno il 50% degli studenti, mentre l'item 3 è stato svolto con apparente superficialità.

Analogamente gli item 4, 5 e 6 hanno valori di media, moda e mediana molto simili ed essendo, per ciascuno di essi, anche abbastanza vicini al punteggio massimo ottenibile. Anche l'item 8 possiede valori di media, moda e mediana in un range abbastanza contenuto, ma la media dei punteggi ottenuti non coincide con il punteggio massimo ottenibile che, inoltre, nessuno studente ha raggiunto: ciò significa che l'item 8 è risultato abbastanza complesso agli studenti ma essi hanno comunque provato ad impegnarsi seriamente per cercare di produrre un risultato apprezzabile dal punto di vista matematico. In effetti, l'item 8 era il più difficile e il solo fatto che la maggior parte degli studenti abbia prodotto risposte anche in parte corrette, è comunque a mio giudizio un dato confortante.

Analisi degli item

Nel seguito riporto, per ciascun item della prova, il calcolo dei quattro parametri che permettono di valutarne la bontà seguito (sempre per ciascuno di essi) da un grafico che permette di analizzare più intuitivamente il loro andamento.

Partiamo con l'analizzare l'**indice di difficoltà** (ID) di un item, il quale è definito dalla seguente relazione:

$$ID = \frac{P_{tot}}{P_{max}}$$

dove P_{tot} è la somma dei punteggi ottenuti dagli studenti relativamente al quel item, mentre P_{max} è il punteggio massimo ottenibile risolvendo correttamente e completamente l'item.

L'indice di difficoltà può variare tra 0 e 1. Se $ID=0$ allora nessuno studente è riuscito a risolvere l'item e quindi si può dedurre che è troppo difficile. Se $ID=1$ allora tutti gli studenti sono riusciti a risolvere l'item e quindi l'item è troppo facile. Valori intermedi tra 0 e 1, invece, indicano che l'item è mediamente difficile o mediamente facile a seconda che l'indice di difficoltà dell'item sia più vicino a 0 oppure a 1.

Nella tabelle che segue sono riportati i valori dell'indice di difficoltà per gli item della prova:

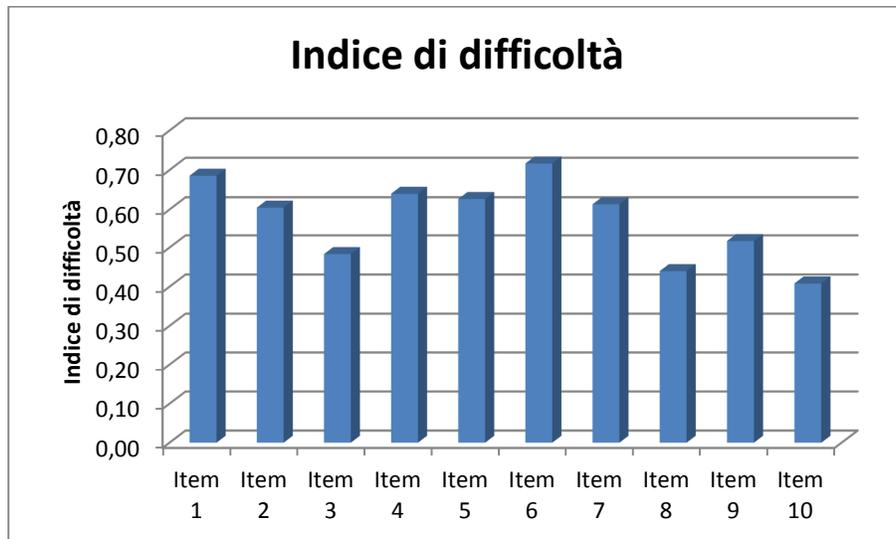
	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10
Indice di difficoltà	0,69	0,60	0,48	0,64	0,63	0,72	0,61	0,44	0,52	0,41

Si può immediatamente osservare che gli item 3, 8 e 10 sono risultati abbastanza complessi, subito seguiti dall'item 9. Questi bassi valori potevano essere abbastanza prevedibili siccome gli item 3, 8, 9 e 10 erano quelli che richiedevano una maggiore capacità di astrazione nonché l'abilità di riuscire a collegare diversi aspetti teorici affrontati nel corso dell'anno. Come può essere ovvio, non tutti gli studenti sono stati in grado di sviluppare queste capacità, vuoi per uno studio non sempre adeguato e continuativo, vuoi per uno studio finalizzato al raggiungimento di un obiettivo immediato (le verifiche intermedie) e non all'obiettivo finale.

Va precisato, inoltre, che l'indice di difficoltà abbastanza elevato dell'item 9 (probabilmente dovuto al fatto che un punteggio è stato assegnato anche a chi ha solo segnato la risposta corretta senza motivare la sua scelta), non spiega il fatto che pochi studenti hanno risolto completamente e correttamente a questo item.

I valori più alti, ovvero quelli relativi agli item 1 e 6, non hanno a mio giudizio nulla di sorprendente in quanto la loro soluzione richiedeva esclusivamente l'uso delle regole di derivazione per le funzioni semplici, argomento noto agli studenti già da circa un mese scolastico, oltre a tecniche risolutive algebriche di tipo standard.

Nel grafico qui sotto è riportato l'indice di difficoltà (in ordinata) per ciascun item (in ascissa):



Il **potere discriminante** (PD) di un item è definito dalla seguente relazione:

$$\frac{E - S}{N}$$

dove E sta a indicare il numero di risposte esatte date all'item (ovvero quelle valutate con un punteggio maggiore o uguale alla metà del punteggio totale ottenibile con l'item), S il numero di risposte sbagliate date all'item e N sta a indicare il numero totale delle risposte.

Il potere discriminante varia tra 0 e 1. Se $PD=0$ significa che tutti gli studenti hanno risposto correttamente oppure tutti in maniera errata e, quindi, l'item non discrimina tra studenti preparati e meno preparati (almeno relativamente a quell'item). Viceversa se $PD=1$ significa che metà studenti ha risposto correttamente e gli altri in maniera errata e, in questo caso l'item è discriminante e il PD ha valore massimo.

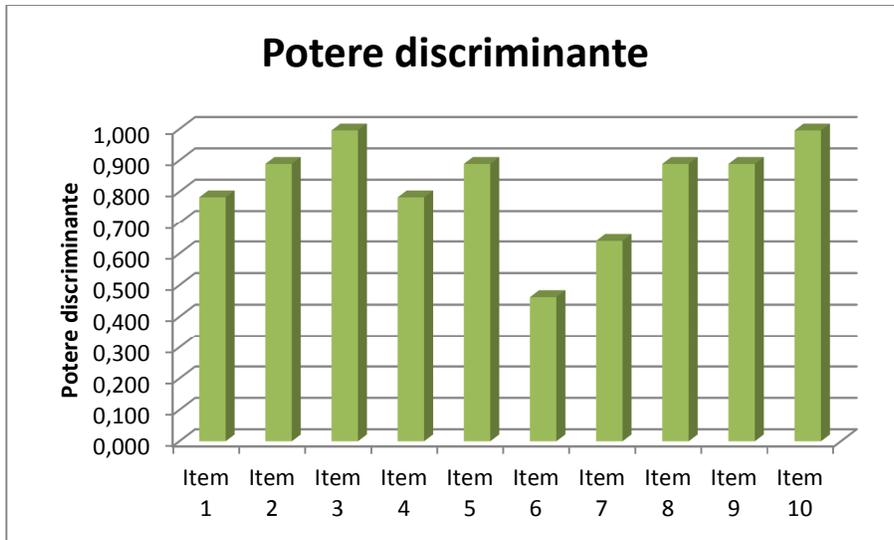
Nella tabella seguente sono riportati i valori del potere discriminante degli item della prova:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10
corrette	11	10	8	11	5	13	12	5	5	8
errate	4	5	7	4	10	2	3	10	10	7
PD	0,782	0,889	0,996	0,782	0,889	0,462	0,640	0,889	0,889	0,996

Il calcolo del potere discriminante conferma sostanzialmente quanto era emerso dall'analisi dell'indice di difficoltà degli item calcolato in precedenza. Gli item 1 e 6 sono tra quelli ad avere il più basso potere discriminante perché sono risultati quelli più facili, così come si era già intuito dall'analisi dell'indice di difficoltà; ad essi vanno però aggiunti l'item 4 e 7 i quali sono risultati altrettanto semplici probabilmente perché in un caso (item 7) gli studenti potevano formulare una risposta anche usando parole proprie e/o proposte di probabili grafici che dessero l'idea dell'andamento della funzione, oppure perché nell'altro caso (item 4) venivano richieste competenze algebriche e di calcolo differenziale molto elementari alle quali andava aggiunto un

commento usando parole proprie sulle funzioni trovate. Invece, come era prevedibile gli altri item, in particolare gli item 3 e 10, hanno un potere discriminante molto vicino al valore 1.

Nel grafico qui sotto è riportato il potere discriminante (in ordinata) per ciascun item (in ascissa):



L'**indice di selettività** (IS) di un item è definito dalla seguente formula:

$$IS = \frac{N_m - N_p}{N}$$

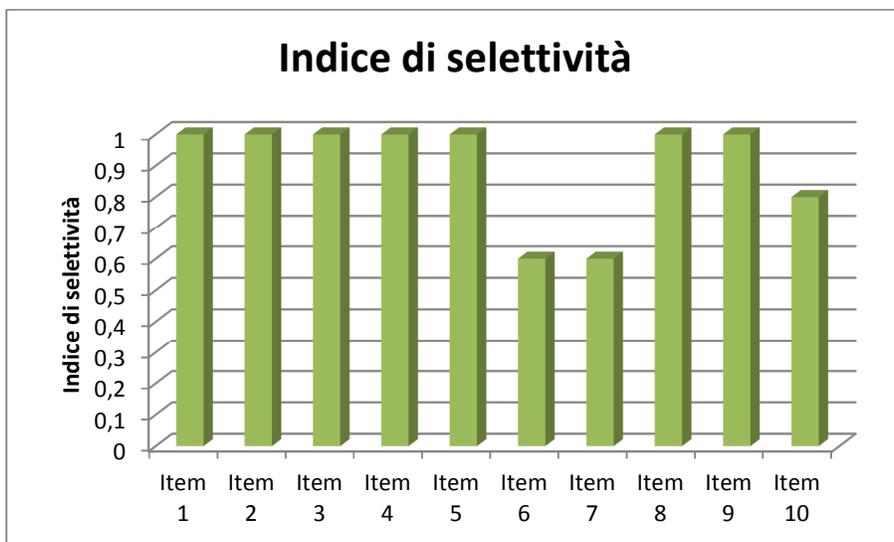
dove N_m sta a indicare il numero di risposte esatte date dall' degli studenti che ha conseguito il punteggio migliore dell'intera prova di valutazione, N_p sta a indicare il numero di risposte esatte date dall' degli studenti che ha conseguito il punteggio peggiore dell'intera prova di valutazione e infine N è il numero totale degli studenti. L'indice di selettività varia tra e .

Se $IS=$ significa che gli studenti che hanno ottenuto le valutazioni migliori nella prova hanno risposto tutti in maniera errata all'item e contemporaneamente quelli che hanno ottenuto le valutazioni peggiori hanno risposto tutti in maniera corretta all'item. In questo caso, si parla di selettività rovesciata. Se $IS=$ l'item non discrimina tra studenti più preparati e meno preparati perché . Se, infine, $IS=$ significa che chi ha ottenuto le valutazioni migliori nella prova ha risposto correttamente all'item e chi ha ottenuto le valutazioni peggiori nella prova ha risposto in modo errato all'item.

Nella tabella seguente sono riportati i valori dell'indice di selettività degli item della prova:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10	Media
N_m	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	
N_p	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	
IS	1	1	1	1	1	0,6	0,6	1	1	0,8	0,9

Dai calcoli dell'indice di selettività emerge che l'item 6 e 7 sono relativamente poco selettivi per i motivi già detti in precedenza: l'item 6 è uno di quelli più facili, mentre l'item 7 ha permesso a tutti, anche a coloro che non hanno raggiunto un punteggio soddisfacente, di formulare una risposta talvolta usando parole proprie. Tutti gli altri item raggiungono il valore massimo possibile per l'indice di selettività (1), ad eccezione dell'item 10 che, seppur risultato difficile per la maggior parte degli studenti, contemplava la possibilità di spiegare a parole la risoluzione riportando la formula fisica legata all'energia e la formula matematica per calcolare la velocità istantanea utilizzando il concetto di derivata.



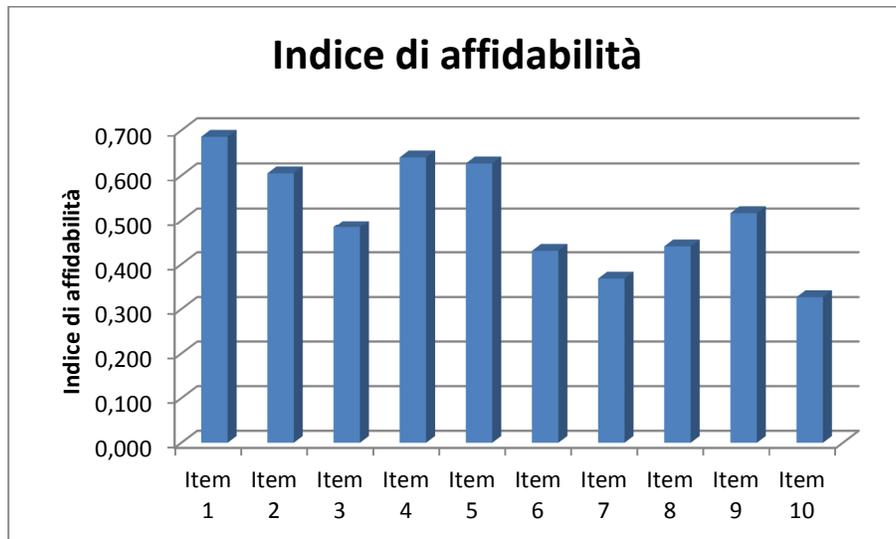
L'**indice di affidabilità** (*IA*) di un item è definito dal prodotto tra l'indice di difficoltà e l'indice di selettività dell'item stesso:

L'indice di affidabilità varia tra 0 e 1. Più il valore dell'indice di affidabilità si avvicina a 1 e più l'item è da considerarsi affidabile, cioè discriminante nel modo corretto tra gli studenti più preparati e meno preparati.

Nella tabella seguente sono riportati i valori dell'indice di affidabilità per gli item della prova:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10	Media
IA	0,686	0,605	0,483	0,640	0,627	0,430	0,368	0,440	0,517	0,327	0,512

Il calcolo dell'indice di affidabilità ci fa intuire che tutti gli item sono sufficientemente affidabili ad eccezione dell'item 7 e 10 i quali hanno i più bassi indici di affidabilità e che dunque possono essere considerati poco affidabili ai fini valutativi nell'ambito di questa prova.



Commento sull'analisi degli item

L'analisi dei parametri degli item ha messo in evidenza come gli item 3, 8, 9 e 10 abbiano creato diversi problemi agli studenti. Nonostante gli item fossero stati scelti in maniera adeguata alla didattica svolta in classe e, a mio giudizio, fossero alla portata della maggior parte degli studenti, anche quelli che hanno raggiunto punteggi soddisfacenti o molto soddisfacenti hanno riscontrato problemi nella risoluzione dei suddetti item e nessuno è stato in grado di svolgere completamente e correttamente l'item 8. Per quanto riguarda le difficoltà riscontrate dagli studenti relativamente a questi item, possiamo così sintetizzarle:

- Nella risoluzione dell'item 3 molti studenti hanno semplicemente calcolato, quasi sempre correttamente, la derivata prima della funzione assegnata, ma si sono dimenticati di calcolare per prima cosa il dominio della funzione da derivare. Questo errore è, nella maggioranza dei casi, dovuto al fatto che gli studenti considerano la derivata un processo standardizzato che non ha necessità di essere validato e che segue regole e precise tabelle. Infatti, volutamente l'item 3 è stato inserito dopo due item che prevedevano un uso sistematico delle regole di derivazione in cui non era necessaria la validazione.
- L'item 8 è sicuramente quello meno facile perché è espresso in maniera nuova e molto differente rispetto ai classici esercizi che si trovano sugli attuali libri di testo scolastici. Ovviamente, la presenza di un item come questo ha creato un po' di scompiglio ma l'ho inserito perché volevo abituare, con un netto anticipo, gli studenti a esplicitare i loro ragionamenti cercando di far virare la loro valutazione non solo sulle conoscenze ma anche sulle competenze, avvicinandoli così anche alle richieste della seconda prova dell'esame di maturità. Appare comunque buono l'impatto degli studenti con una valutazione sufficiente, che sono riusciti nella maggior parte dei casi a produrre risposte abbastanza soddisfacenti, anche se non completamente corrette, che lasciavano sottendere un meta-ragionamento sugli aspetti teorici affrontati fino a quel punto dell'anno scolastico.
- Per quanto riguarda l'item 9, che chiedeva di individuare la risposta corretta a scelta tra quattro possibili alternative, la maggior parte degli studenti è riuscita a individuare la

risposta corretta ma soltanto pochi sono riusciti a motivare la propria scelta. A mio giudizio, la motivazione è da ricercarsi nel fatto che raramente uso nelle prove di valutazioni domande a risposta multipla e probabilmente nelle altre prove di valutazione (di altre materie) non sono abituati a dover motivare le proprie risposte in un item a risposta multipla.

- Infine, l'item 10 non è difficile in termini matematici, ma prevede che gli studenti ricordino il significato di velocità istantanea (e i suoi legami con il calcolo differenziale) e la formula dell'energia cinetica, che non utilizzavano da almeno un anno scolastico. Non essendo il loro insegnante di fisica non ho concordato l'item con il collega, ma ho ritenuto di doverlo inserire sempre volgendo lo sguardo all'esame di maturità. Sono convinto che l'item sarebbe stato abbastanza semplice se i ragazzi cominciassero a ragionare anche in termini interdisciplinari, come spesso facciamo durante le nostre lezioni di matematica.

La presenza di item semplici e puramente di applicazione delle formule, come l'item 1, 2 e 4, sarebbe dovuto essere un incentivo ad affrontare la prova con maggiore determinazione rivolto soprattutto per gli studenti più deboli e in difficoltà; purtroppo nessuno degli studenti che hanno ottenuto valutazioni insufficienti ha saputo cogliere questa occasione e questo, a mio avviso, dimostra il loro scarso impegno o interesse verso la materia. Sarà mio dovere cercare di motivare ulteriormente la loro personalità per provare a raggiungere l'obiettivo finale.

Se dovessi riproporre questa prova di valutazione, in una classe non troppo dissimile da questa V Liceo Scientifico, probabilmente non apporterei nessuna variazione significativa agli item e questa mia affermazione si basa anche sul fatto che il loro indice di selettività medio è molto prossimo al valore massimo (0,9) che ritengo un buon parametro per sostenere che gli item siano stati scelti in maniera accurata. Ovviamente, sono disposto ad accettare le critiche dei colleghi che eventualmente vorranno utilizzare questa prova di valutazione nella loro prassi didattica, in particolare discutendo insieme degli esiti dopo la sua somministrazione.

INDICAZIONI per il RECUPERO

Dall'analisi dei dati emersi dalla prova di valutazione somministrata si evidenzia che solo 4 studenti sui 15 presenti non hanno raggiunto la sufficienza. Si tratta di studenti che sin da inizio hanno dimostrato uno scarso impegno e uno studio assolutamente incostante e inadeguato, soprattutto per una classe terminale che dovrà affrontare un Esame di Stato. Per questi studenti sono stati attivati da parte della scuola dei corsi di recupero, siccome presentavano già l'insufficienza di matematica nel primo quadrimestre, ma all'epoca della somministrazione di questa prova di valutazione tali corsi non erano ancora iniziati. In ogni caso, i corsi di recupero servono per recuperare gli argomenti essenziali relativi al primo quadrimestre. Per tale motivo, agli studenti insufficienti è stata consegnata una copia cartacea della correzione della verifica (che è stata fatta in classe nella lezione successiva alla verifica) con in allegato l'elenco di alcuni esercizi di recupero (che si possono trovare sul loro libro di testo) da svolgere e consegnare entro una settimana. Dopo tale termine verrà svolta una verifica di recupero con alcuni esercizi simili sia a quelli già presenti in questa prova di valutazione, sia a quelli assegnati come recupero. Nello stesso giorno verrà offerta la possibilità agli studenti risultati assenti (nella data in cui si è svolta questa prova di valutazione), di recuperare la prova svolgendone una similare e contenente item di pari difficoltà.

AUTORIFLESSIONE

Al termine di questo elaborato mi posso dire soddisfatto dei risultati ottenuti perché l'analisi degli item, ottenuta seguendo le indicazioni che ci sono state date nell'ambito del corso di Docimologia, mi ha confermato che gli item che avevo scelto a suo tempo (prima ancora che iniziasse il PAS!) risultano funzionali per valutare gli obiettivi di apprendimento che mi ero prefissato per questa parte del programma.

Ovviamente gli item che ho scelto possono anche essere biasimati da altri colleghi o ritenuti, da alcuni, troppo difficili. Ecco quelli che a mio giudizio sono i punti di forza di questa prova: essa contiene alcuni item siano facili (1, 2 e 6) e che altri (5, 7, 9 e parte del 4) che offrono allo studente la possibilità di produrre una risposta matematica anche con parole proprie, aiutandolo a formulare delle "risposte matematiche" che potranno essergli utili anche per la prova orale dell'Esame di Maturità. Allo stesso modo penso che gli item 3 e 8 siano risultati difficili per gli studenti per due motivi: il tempo a disposizione per l'intera prova è risultato non così sufficiente come avevo calcolato, prevedevano tecniche risolutive in parte differenti da quelle spiegate e fatte in classe (e, conoscendo la classe in questione, questo rappresenta per i ragazzi un problema non facile da affrontare!).

Nonostante gli accorgimenti adottati durante la somministrazione della prova abbiano assicurato che gli studenti lavorassero in maniera autonoma e serena (c'è quasi sempre stato un sostanziale silenzio durante lo svolgimento della prova), sono rimasto abbastanza stupito (all'epoca) dal fatto che gli studenti che poi hanno conseguito una valutazione insufficiente non abbiano sfruttato appieno il tempo a loro disposizione e in maniera seria e matura. Ora che è passato un po' di tempo e sto compilando questa relazione posso dire che il lavoro di recupero che avevo predisposto per gli insufficienti ha consentito loro di compiere alcuni significativi, nonostante ancora due di essi risultino ancora nel complesso insufficienti in matematica.

Posso concludere che questa prova di valutazione potrà essere nuovamente somministrata in una classe V Liceo Scientifico, ma bisognerà tener conto di fornire agli studenti almeno 15 minuti in più per svolgerla. Inoltre, penso che sia necessario prevedere di dedicare un'ora aggiuntiva per svolgere in classe ulteriori esercizi, magari già selezionandoli dai temi d'esame delle precedenti maturità.