

CORSO DI PEDAGOGIA SPERIMENTALE

ANALISI DI UNA PROVA DI VALUTAZIONE DI MATEMATICA

DOCENTE DEL CORSO

Prof Roberto Trinchero

SPECIALIZZANDA

Dott.ssa Roberta Rotondo
Indirizzo FIM Classi A047-A049
atrebor.r@libero.it

Indice

1.	Destinatari della prova	3
2.	Contenuti e prerequisiti	3
3.	Obiettivi generali	4
4.	Obiettivi cognitivi e descrittori di raggiungimento	4
5.	Tipologia e struttura della prova	7
6.	Prova di verifica e correttore	7
7.	Criteri di scoring	7
8.	Griglia e criterio di valutazione	7
9.	Resoconto somministrazione, risultati della prova e relativa analisi	10
10.	Parametri descrittivi relativi agli item	14
11.	Indicazioni per il recupero e la programmazione successiva	19
12.	Autoriflessione conclusiva	20

1. Destinatari della prova

La prova di verifica presa in esame è stata da me somministrata in una classe seconda Liceo Scientifico PNI durante una supplenza temporanea nel mese di febbraio del 2009. La prova è stata effettuata al termine di un intervento didattico riguardante la trattazione e lo studio delle equazioni di secondo grado.

La classe a cui è stata somministrata la prova di verifica è formata da 22 studenti, di cui 15 maschi e 7 femmine.

2. Contenuti e prerequisiti

Elenchiamo i contenuti specifici trattati nell'intervento didattico e i prerequisiti necessari.

Contenuti specifici

- ◆ Generalità sulle equazioni di secondo grado in una incognita.
- ◆ Soluzioni di un'equazione di secondo grado
- ◆ Risoluzione delle equazioni di secondo grado:
 - Equazioni monomie
 - Equazioni pure
 - Equazioni spurie
 - Equazioni complete
- ◆ Relazione tra radici e coefficienti
 - Somma e prodotto delle radici
 - Scomposizione del trinomio di secondo grado
 - Regola di Cartesio
- ◆ Equazioni numeriche frazionarie
- ◆ Problemi

Prerequisiti

Per affrontare i contenuti dell'unità didattica è necessario:

- conoscere le tecniche del calcolo letterale;
- conoscere i concetti fondamentali relativi alle equazioni;
- conoscere i radicali quadratici e le principali operazioni con essi;

- saper eseguire le operazioni e le trasformazioni con i radicali;
- saper applicare le nozioni sui radicali alla risoluzione di equazioni a coefficienti irrazionali.

3. Obiettivi generali

Elenchiamo gli obiettivi generali dell'unità didattica suddividendoli tra obiettivi specifici (relativi alla disciplina) e obiettivi trasversali (interdisciplinari).

Obiettivi specifici

- ◆ Conoscere la forma canonica di un'equazione di secondo grado
- ◆ Conoscere la classificazione delle equazioni di secondo grado: equazioni complete ed equazioni incomplete (monomie, pure, spurie)
- ◆ Conoscere i metodi risolutivi delle equazioni di secondo grado, complete ed incomplete
- ◆ Conoscere la relazione tra radici e coefficienti di un'equazione di secondo grado
- ◆ Conoscere la regola di Cartesio
- ◆ Saper risolvere le equazioni di secondo grado
- ◆ Saper scomporre in fattori un trinomio di secondo grado
- ◆ Saper risolvere problemi di secondo grado

Obiettivi trasversali

- Saper applicare ragionamenti di tipo deduttivo
- Sviluppare senso critico nell'interpretazione del risultato
- Imparare a formulare ipotesi e a verificarle con l'insegnante o confrontandole con i compagni
- Saper applicare regole e procedure adeguate al tipo di problema
- Saper usare simboli e linguaggio scientifico opportuni.

4. Obiettivi di apprendimento e descrittori di raggiungimento

La prova è strutturata in 8 item ciascuno dei quali vuole misurare l'effettivo raggiungimento di uno o più obiettivi cognitivi secondo quanto riportato nella seguente tabella.

Item	Obiettivi di apprendimento	Classificazione Anderson e Krathwohl	Indicatori / Descrittori
1	Conoscere i casi particolari di equazioni di secondo grado. Saper fare semplici calcoli e riconoscere proposizioni errate	Ricordare - comprendere	Lo studente conosce le soluzioni di un equazione pura; conosce le soluzioni associate al segno del discriminante; è in grado di trovare le due soluzioni di un equazione completa e sa calcolarne il prodotto.
2	Conoscere la relazione tra coefficienti e radici di un equazione di secondo grado	Valutare - analizzare	Lo studente riconosce il tipo di equazione dalle sue radici. Lo studente completa in modo corretto verificando il risultato ottenuto
3	Conoscere le regole fondamentali del calcolo algebrico. Saper riconoscere e correggere passaggi errati.	Valutare - analizzare	Lo studente riconosce un errore nella risoluzione di un equazione spuria e sa trovarne le soluzioni. Lo studente riconosce che $x^2 = -25$ è un'equazione impossibile
4	Saper risolvere un'equazione di secondo grado a coefficienti interi.	Applicare - eseguire	Lo studente sa svolgere correttamente i prodotti notevoli presenti. Lo studente sa semplificare entrambi i membri dell'equazione riducendola a forma normale. Lo studente sa trovare in modo corretto le due soluzioni dell'equazione.
5	Saper risolvere un'equazione di secondo grado a coefficienti interi.	Applicare - eseguire	Lo studente sa svolgere correttamente i prodotti notevoli presenti. Lo studente sa semplificare entrambi i membri dell'equazione riducendola a forma normale.

			Lo studente sa trovare in modo corretto le due soluzioni dell'equazione.
6	Saper risolvere un'equazione di secondo grado a coefficienti irrazionali.	Applicare - eseguire	Lo studente svolge i prodotti notevoli presenti in modo corretto. Lo studente sa semplificare entrambi i membri dell'equazione riducendola a forma normale sommando i radicali simili. Lo studente sa trovare e discutere in modo corretto le soluzioni dell'equazione.
7	Saper risolvere un'equazione di secondo grado a coefficienti irrazionali.	Applicare - eseguire	Lo studente sa calcolare le radici dell'equazione scomponendo in modo corretto il radicando (discriminante) mediante formula del radicale doppio o scomposizione in fattori. Lo studente sa trovare le due soluzioni dell'equazione.
8	Saper risolvere il problema mediante un sistema di secondo grado. Saper analizzare le soluzioni trovate in base ai dati forniti	Valutare - analizzare	Lo studente sa impostare un sistema di secondo grado per risolvere il problema. Lo studente sa trovare le due soluzioni mediante la risoluzione del sistema. Lo studente analizza le soluzioni trovate individuando quelle accettabili sulla base delle informazioni fornite dal testo del problema

5. Tipologia e struttura della prova

La prova è stata pensata con la funzione di verifica di più livelli di apprendimento e per questo è stata strutturata con item di vario tipo: gli esercizi 1, 2 e 3 hanno carattere teorico, mentre gli esercizi dal 4 al 6 sono esclusivamente applicativi. Nell'ultimo è richiesta una buona capacità di formalizzazione e comprensione.

6. Prova di verifica e correttore

Nel file allegato "Rotondo_prova di verifica.pdf" è contenuto il testo della verifica somministrata agli studenti. Si allega inoltre la risoluzione di ogni esercizio nel file "Rotondo_correttore.pdf"

7. Criteri di scoring

La somma totale dei punteggi assegnati è 20: all'interno di ogni singolo esercizio è stato ripartito il punteggio secondo quanto riportato nella griglia di valutazione. Il punteggio massimo è stato assegnato nei casi di esercizi svolti in modo formalmente e numericamente corretto. Si è inoltre tenuto conto degli obiettivi cognitivi che ogni singolo esercizio volesse testare, per far sì che alla sufficienza corrispondesse un adeguato raggiungimento degli obiettivi minimi.

8. Griglia e criteri di valutazione

Per correggere la prova ho utilizzato la seguente griglia di valutazione, contenente punteggi, sottopunteggi e parzialità.

Item	Punteggi
1	<u>Punteggio totale</u> : 2 <u>Sottopunteggi</u> : 0,5 punti per ogni risposta corretta <u>Parzialità</u> : nessuna (richiesta non soddisfatta: 0 punti)

2	<u>Punteggio totale:</u> 2 <u>Sottopunteggi:</u> 1 punto per ogni completamento corretto <u>Parzialità:</u> nessuna (richiesta non soddisfatta: 0 punti)
3	<u>Punteggio totale:</u> 2 <u>Sottopunteggi:</u> 0,5 per ogni errore trovato e per ogni correzione svolta <u>Parzialità:</u> nessuna (richiesta non soddisfatta: 0 punti)
4	<u>Punteggio totale:</u> 3 <u>Parzialità:</u> - 0,5 se nel calcolo sono presenti errori di calcolo - 1 per ogni errore grave
5	<u>Punteggio totale:</u> 3 <u>Parzialità:</u> - 0,5 se nel calcolo sono presenti errori di calcolo - 1 per ogni errore grave
6	<u>Punteggio totale:</u> 3 <u>Parzialità:</u> - 0,5 se nel calcolo sono presenti errori di calcolo - 1 per ogni errore grave
7	<u>Punteggio totale:</u> 3 <u>Parzialità:</u> - 0,5 se nel calcolo sono presenti errori di calcolo - 1 per ogni errore grave 2,5 punti se si utilizzava la formula risolutiva del radicale doppio
8	<u>Punteggio totale:</u> 2 <u>Parzialità:</u> 1 punto se si trovava la soluzione numerica per tentativi, non utilizzando la formalizzazione richiesta. - 0,5 se nel calcolo sono presenti errori di calcolo - 1 per ogni errore grave

Il dipartimento di Matematica del Liceo ho stabilito che il voto minimo è 2 e quello massimo 10. Per ottenere la sufficienza, cioè voto 6, è necessario totalizzare 12 punti, mentre il voto massimo corrisponde ad una prova in cui si sono totalizzati 20 punti. I voti corrispondenti ai punteggi di ogni studente sono stati ottenuti utilizzando i seguenti fattori di scala:

- fattore di scala della sufficienza

$$f_{ss} = \frac{(\text{punteggio totale}) - (\text{punteggio sufficienza})}{(\text{voto massimo}) - (\text{voto sufficienza})} = \frac{20 - 12}{10 - 6} = \frac{8}{4} = 2$$

- fattore di scala dell'insufficienza

$$f_{si} = \frac{\text{punteggio sufficienza}}{(\text{voto sufficienza}) - (\text{voto minimo})} = \frac{12}{6 - 2} = \frac{12}{4} = 3$$

Utilizzando le seguenti formule è stato possibile ricavare tutti i voti intermedi.

- Se il punteggio totale della prova dello studente è risultato maggiore o uguale al punteggio di sufficienza (≥ 12) allora

$$\begin{aligned} \text{voto} &= \text{voto sufficienza} + \frac{(\text{punteggio totale studente}) - (\text{punteggio sufficienza})}{f_{ss}} = \\ &= 6 + \frac{(\text{punteggio totale studente}) - 12}{2} \end{aligned}$$

- Se il punteggio totale della prova dello studente è risultato minore del punteggio di sufficienza (< 12) allora

$$\begin{aligned} \text{voto} &= \text{voto minimo} + \frac{\text{punteggio totale studente}}{f_{si}} = \\ &= 2 + \frac{\text{punteggio totale studente}}{3} \end{aligned}$$

Per l'attribuzione dei voti finali si è deciso di utilizzare anche i quarti di voto: ad esempio tra il voto 5 e 6 sono assegnati i voti

$$5,25 = 5 + \quad 5,50 = 5\frac{1}{2} \quad 5,75 = 6 -$$

Questo criterio ha quindi richiesto un approssimazione al valore per cui era minimo lo scarto tra il valore ottenuto e il punteggio approssimato.

9. Resoconto somministrazione, risultati della prova e relativa analisi

La prova è stata somministrata agli studenti dando loro 50 minuti per la risoluzione. Nessun allievo risultava assente. E' stato chiesto agli studenti di non operare cancellature nel primo esercizio: le risposte sarebbero state considerate errate anche se esatte se non vi fosse stato un solo segno ben leggibile per ogni quesito.

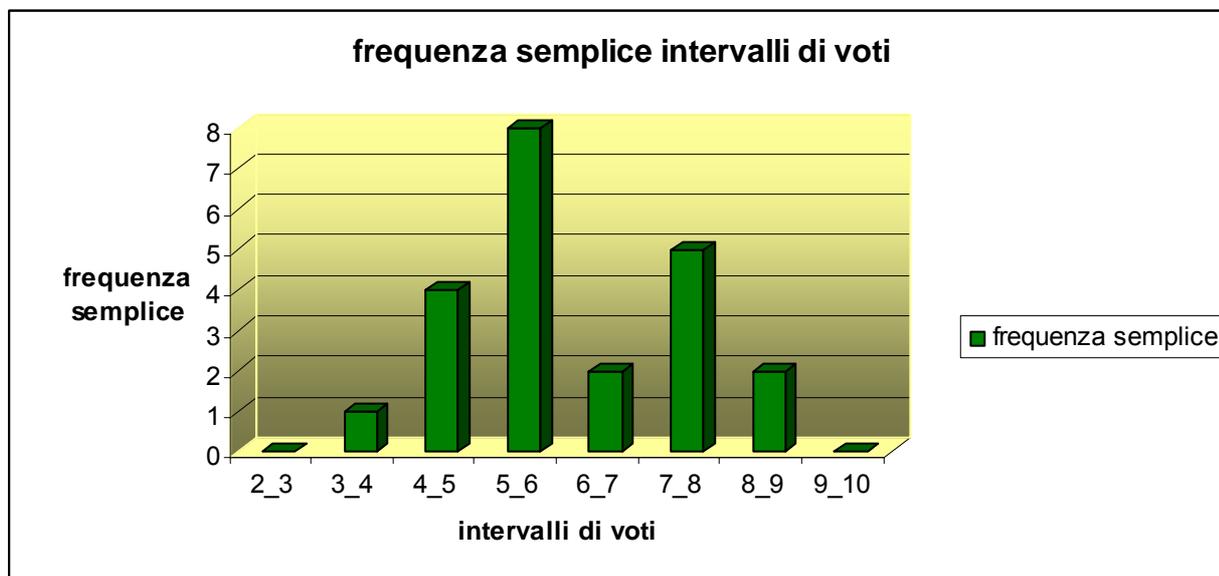
I risultati della prova

Nella seguente tabella vengono riportati i risultati della prova per allievo (riga) e gli esiti di ogni singolo item (colonna), il punteggio ottenuto ed approssimato ed il voto.

Studente	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	totale	punteggio		voto
S1	1	1	1,5	2,5	2,5	2	1,5	2	14,0	7	7	7
S2	1	1	0	2,5	1,5	2,5	0,5	2	11,0	5,66667	5,67	5 1/2
S3	0,5	1	1	1	0,5	0,5	0	1,5	6,0	4	4	4
S4	2	2	1,5	1,5	2,5	3	1,5	2	16,0	8	8	8
S5	2	0	1	1,5	2,5	0,5	0	2	9,5	5,16667	5,17	5
S6	1	1	1,5	2	0,5	1,5	0,5	2	10,0	5,33333	5,33	5+
S7	1,5	2	1,5	2	1,5	1,5	1	2	13,0	6,5	6,5	6 1/2
S8	0,5	1	1,5	0,5	0	1,5	0	1,5	6,5	4,16667	4,17	4
S9	2	2	1,5	1,5	1,5	2,5	2	2	15,0	7,5	7,5	7 1/2
S10	2	2	1,5	3	1,5	3	2,5	2	17,5	8,75	8,75	9 -
S11	0	0	0,5	1	0,5	1	0,5	1	4,5	3,50000	3,5	3 1/2
S12	0,5	2	1,5	1,5	1,5	2	0	2	11,0	5,66667	5,67	3 1/2
S13	1	0	1	2	1	2,5	1,5	1,5	10,5	5,50000	5,50	5 1/2
S14	2	2	0,5	1,5	0,5	0	0	2	8,5	4,83333	4,83	5 -
S15	2	2	1,5	2	1,5	2,5	1	1,5	14,0	7	7	7
S16	1,5	1	1,5	1,5	0,5	2,5	1	2	11,5	5,83333	5,83	6 -
S17	2	2	1,5	2,5	1,5	1,5	2	2	15,0	7,5	7,5	7 1/2
S18	2	2	1,5	1,5	0	1,5	1,5	2	12,0	6	6	6
S19	1,5	0	0,5	2	2,5	0,5	1	1,5	9,5	5,16667	5,17	5
S20	0,5	2	1,5	1,5	2,5	2	2,5	2	14,5	7,25	7,25	7 +
S21	2	2	1	1	0	1,5	2	2	11,5	5,83333	5,83	6 -
S22	0,5	1	0,5	1	0,5	1,5	1	0,5	6,5	4,16667	4,17	4

I risultati rispecchiano il normale andamento della classe, con un gruppo che ottiene ottimi risultati e poche insufficienze gravi.

Il seguente istogramma fornisce la distribuzione dei risultati ottenuti.



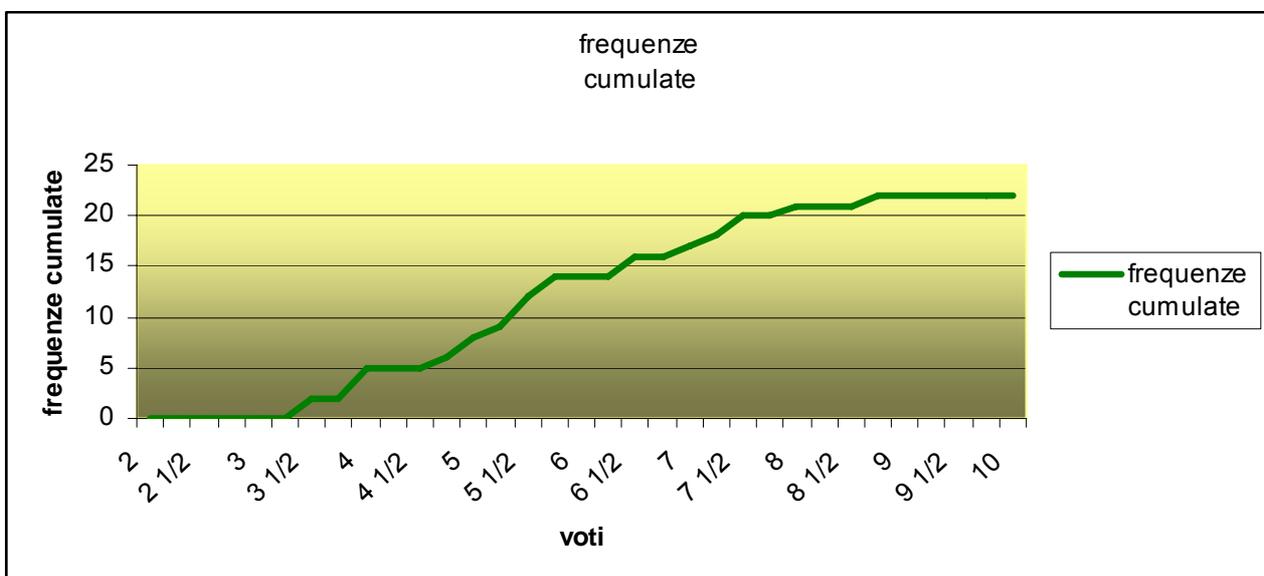
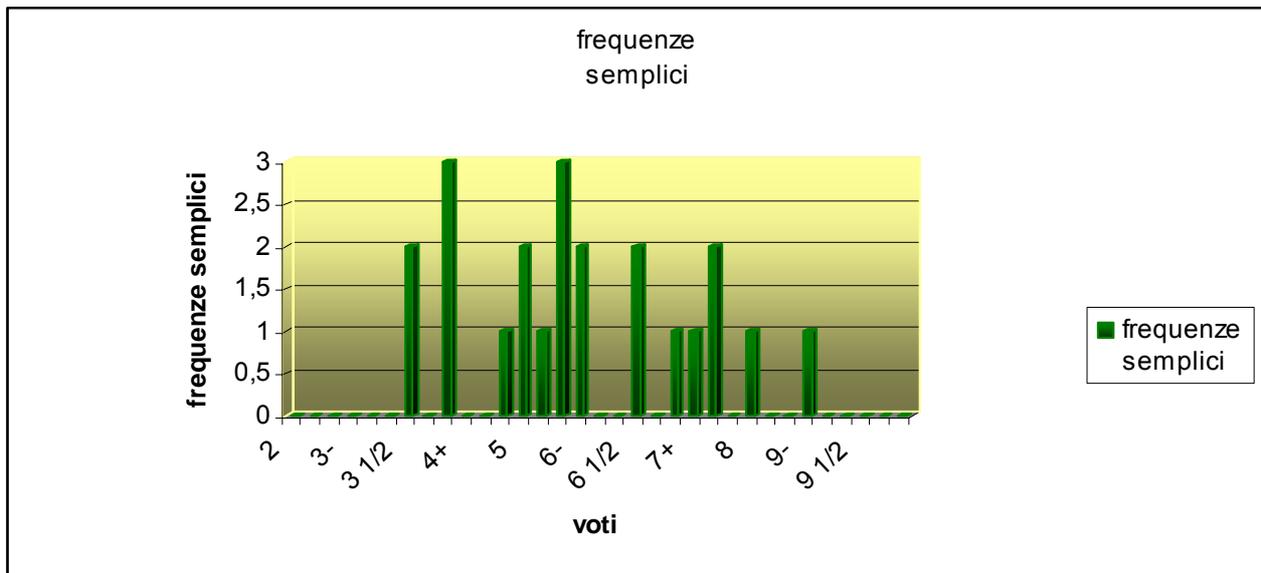
La fascia in cui è presente una maggiore densità di voti è quella compresa tra il 5 ed il 6. Nessuno studente ha ottenuto il punteggio minimo ma neanche un voto maggiore o uguale a 9.

Frequenze, percentuali, indici di tendenza e di posizione

La seguente tabella mostra le frequenze semplici e cumulate per ogni voto attribuibile ed i relativi istogrammi

voto	frequenze semplici	frequenze cumulate
2	0	0
2+	0	0
2 1/2	0	0
3-	0	0
3	0	0
3+	0	0
3 1/2	2	2
4-	0	2
4	3	5
4+	0	5
4 1/2	0	5
5-	1	6
5	2	8
5+	1	9
5 1/2	3	12

6-	2	14
6	0	14
6+	0	14
6 1/2	2	16
7-	0	16
7	1	17
7+	1	18
7 1/2	2	20
8-	0	20
8	1	21
8+	0	21
8 1/2	0	21
9-	1	22
9	0	22
9+	0	22
9 1/2	0	22
10-	0	22
10	0	22



10. Parametri descrittivi relativi agli item

Calcoliamo i parametri relativi agli item che risultano utili per la messa a punto della prova di valutazione

Indici di tendenza relativa agli item

Sono stati calcolati, per ogni item, punteggio massimo, punteggio minimo e gli indici di tendenza centrale, cioè moda e mediana, e lo scarto quadratico medio.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	totale
punteggio min	0	0	0	0,5	0	0	0	0,5	4,5
punteggio max	2	2	1,5	3	2,5	3	2,5	2	17,5
media	1,318	1,318	1,159	1,682	1,227	1,705	1,068	1,773	11,3
moda	2	2	1,5	1,5	1,5	1,5	0	2	14
mediana	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1	2	11,25
scarto quadratico	0,682	0,780	0,473	0,608	0,883	0,840	0,821	0,400	

Dalla tabella si può notare che tutti gli item sono stati risolti e che in particolare il numero 8 è stato il più facile, mentre il 7 ha creato difficoltà (la moda è 0).

Indice di difficoltà

L'indice di difficoltà di un item è dato dal rapporto tra i punti ottenuti da tutti i compilatori su quel dato item ed il punteggio massimo ottenibile sull'item, cioè il punteggio ottenuto dalla somma di tutti i punteggi, se tutti i compilatori avessero risposto in modo corretto:

$$ID = \frac{P_{\text{tot}}}{P_{\text{max}}}$$

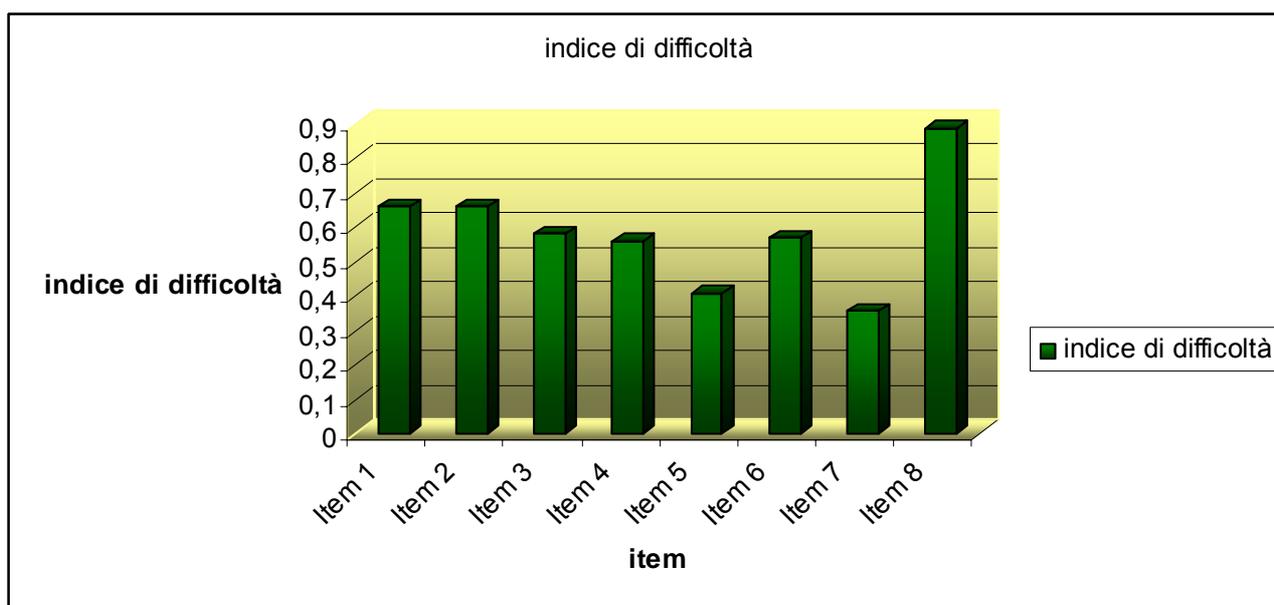
Tale indice varia tra 0 a 1:

- se $ID = 0$ allora l'item è di difficoltà troppo elevata, poiché nessun allievo è riuscito a dare una risposta corretta;
- se $ID = 1$ allora l'item è troppo facile poiché tutti gli allievi hanno risposto correttamente;
- per i valori compresi tra 0 e 1 possiamo costruire la seguente tabella di riferimento.

Valori dell'indice di difficoltà dell'item	Grado di difficoltà dell'item
0 – 0,25	difficile
0,26 – 0,5	medio – difficile
0,51 – 0,75	medio – facile
0,76 - 1	facile

Si riporta la tabella e l'istogramma relativi all' indice di difficoltà degli item della prova svolta:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	media
indice di difficoltà	0,659	0,659	0,580	0,561	0,409	0,568	0,356	0,886	0,585



Dall'istogramma si nota che il settimo ed il quinto esercizio (ID = 0,356 e ID = 0,409 rispettivamente) sono risultati i più difficili, mentre il nono, con indice 0,886, il più facile.

Potere discriminante

Il potere discriminante di un item è dato dal prodotto tra il numero di risposte esatte date all'item (indicato con E) e il numero di risposte sbagliate date all'item (indicato con S), rapportato alla metà del numero totale di risposte (N) elevato al quadrato:

$$DP = \frac{E \cdot S}{\left(\frac{N}{2}\right)^2}$$

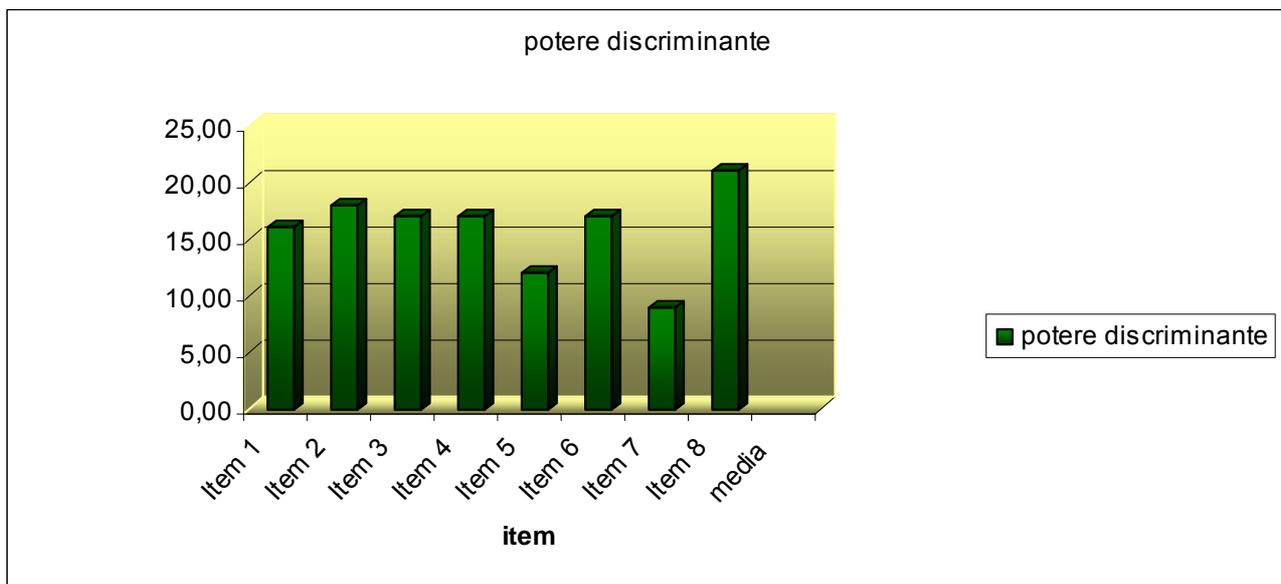
Il potere discriminante varia tra 0 ed 1.

- se DP = 0 allora tutti gli studenti hanno risposto in modo corretto o in modo errato;
- se DP = 1 allora metà degli studenti ha risposto correttamente e metà in modo errato, quindi il potere discriminante è massimo.

La funzione di questo indice è mettere in luce gli item maggiormente utili a discriminare che ha raggiunto gli obiettivi da chi non li ha raggiunti.

Segue la tabella e l'istogramma relativo al potere discriminante degli item della prova in esame:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	media
corrette ($\geq 1/2$ punt. max)	16	18	17	17	12	17	9	21	
errate	6	4	5	5	10	5	13	1	
potere discriminante	0,198	0,149	0,176	0,176	0,248	0,176	0,242	0,043	0,2



Indice di selettività

L'indice di selettività di un item è dato dalla differenza tra il numero di risposte esatte date all'item da parte degli studenti con i risultati migliori nell'intera prova, indicato con N_m (convenzionalmente si considera un terzo del totale degli allievi, corrispondenti al terzo che ha raggiunto il punteggio più alto) e il numero totale di risposte esatte all'item dato

dagli allievi che hanno ottenuto i risultati peggiori nell'intera prova (convenzionalmente si prende un terzo del totale degli allievi, corrispondenti al terzo che ha ottenuto il punteggio più basso), indicato con N_p , rapportato al numero totale degli allievi N diviso 3:

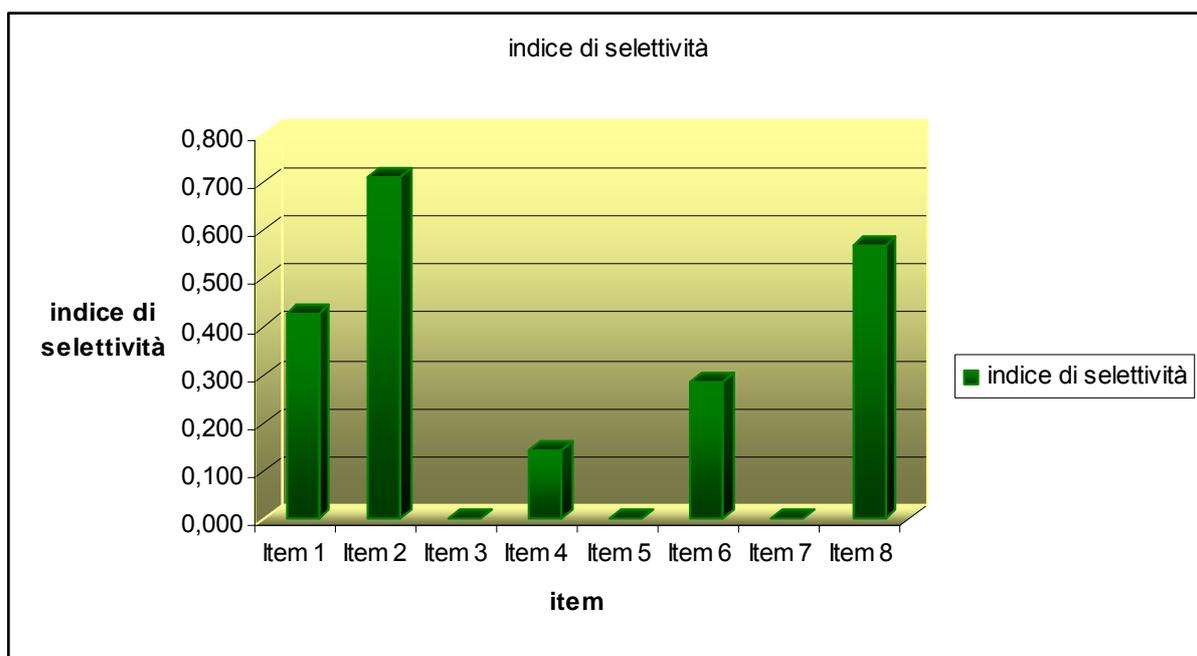
$$IS = \frac{N_m - N_p}{\frac{N}{3}}$$

L'indice di selettività varia tra -1 e +1.

- se $IS = -1$ allora gli studenti che hanno ottenuto il miglior punteggio nella prova hanno risposto tutti in modo errato all'item e gli studenti che hanno ottenuto il peggior punteggio nella prova hanno risposto tutti in modo corretto all'item: selettività rovesciata;
- se $IS = 0$ allora l'item non è selettivo in quanto tanti studenti preparati quanti meno preparati hanno risposto in modo corretto.

Di seguito riportiamo tabella e istogramma con i valori ottenuti:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	media
N_p	2	1	0	0	0	0	0	2	
N_m	5	6	0	1	0	2	0	6	
indice di selettività	0,429	0,714	0	0,143	0	0,286	0	0,571	0,268



Indice di affidabilità

L'indice di affidabilità di un item è dato dal prodotto dell'indice di difficoltà e dell'indice di selettività:

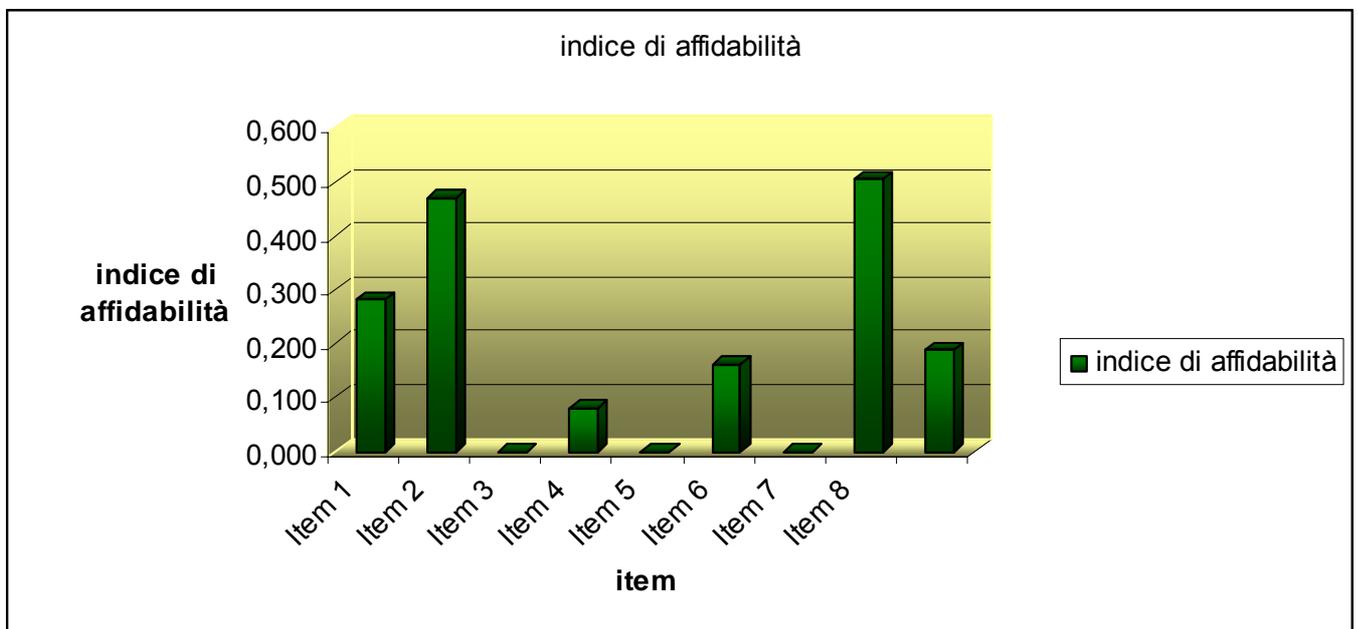
$$IA = ID \cdot IS$$

Questo indice varia da -1 a 1.

- $IA < 0$ se l'indice di selettività è negativo;
- se $IA \approx 0$ allora l'item non discrimina in modo netto gli studenti più preparati da quelli meno preparati.
- se $IA \approx 1$ allora l'item discrimina in modo netto gli studenti più preparati da quelli meno preparati.

Questo indice mette in evidenza come un buon item debba essere sufficientemente facile ed allo stesso tempo discriminante. Si riportano di seguito la tabella e l'istogramma relativi alla prova:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	media
indice di affidabilità	0,282	0,471	0	0,080	0	0,162	0	0,506	0,188



Riflessione sull'analisi degli item

Analizzando i risultati ottenuti e sulla base degli indici considerati direi che la prova andrebbe modificata per renderla migliore. Gli studenti hanno privilegiato gli esercizi standard, quelli cioè puramente applicativi e simili a quelli svolti nei compiti a casa o in classe. Nonostante questo, alcuni sono ormai in grado di risolvere problemi più complessi utilizzando strategie diverse da quelle proposte dall'insegnante.

11. Indicazioni per il recupero e la programmazione successiva

A seguito di questa verifica è stata effettuata la consegna e la correzione della prova stessa sottolineando punti e passaggi che hanno destato problemi.

Non ho potuto dedicare altre ore per il consolidamento degli argomenti trattati per il termine della mia supplenza.

Le equazioni di secondo grado costituiscono però un argomento di notevole importanza perché utilizzate in tutto il corso di studi degli studenti; pertanto richiamerei i concetti fondamentali, riguardanti la comprensione e la risoluzione di problemi risolvibili mediante equazioni di secondo grado, ogni volta che gli argomenti trattati lo richiedano, con domande mirate agli studenti che hanno avuto in questa prova difficoltà.

Permetterei, inoltre, agli studenti che lo desiderano di recuperare il voto insufficiente mediante interrogazioni orali, affinché questi possano dimostrare di aver effettivamente colmato le loro lacune e per poter testare l'avvenuta comprensione di un argomento di basilare importanza.

La programmazione successiva prevede la trattazione dei seguenti argomenti:

- equazioni di grado superiore al secondo:
equazioni binomie, equazioni risolvibili mediante sostituzioni o scomposizioni in fattori.
- i sistemi di secondo grado
- disequazioni di secondo grado
risoluzione grafica e studio algebrico mediante segno del trinomio di secondo grado

12. Autoriflessione conclusiva

La prova che ho costruito mi era parsa adatta per testare, alla fine dell'unità didattica, i vari livelli di conoscenza acquisiti dagli studenti nelle ore di supplenza effettuate: il gran numero di insufficienze e la mancata risoluzione di un esercizio mi fanno capire che forse il tempo di somministrazione è stato breve e che le esercitazioni in classe dovevano essere più numerose in vista della preparazione del compito stesso. L'analisi degli indici mi ha fatto inoltre comprendere che nella scelta degli item ho privilegiato alcune capacità che ogni studente deve a mio avviso possedere a discapito della varietà dei quesiti, per altro in gran numero di tipo applicativo.