

Docimologia - Project work

Marco Illengo

Indice

1	Obiettivi di apprendimento	1
2	Indicatori di raggiungimento	2
3	Destinatari	3
4	Struttura della prova	3
5	Accorgimenti per la somministrazione	3
6	Criteri di valutazione	4
7	Resoconto	4
8	Analisi dei dati	5
8.1	Analisi statistica	5
8.2	Indice di difficoltà e potere discriminante	7
8.3	Indice di selettività	9
8.4	Indice di affidabilità	10
8.5	Correlazione statistica	11
9	Indicazioni per il recupero	13
10	Autoriflessione	13
A	Testo della verifica	14

1 Obiettivi di apprendimento

- Conoscere le primitive delle funzioni elementari
- Conoscere il metodo di integrazione per sostituzione e saperlo applicare al calcolo di una primitiva
- Conoscere il metodo di integrazione per parti e saperlo applicare al calcolo di una primitiva
- Conoscere l'interpretazione geometrica dell'integrale e saperlo utilizzare per calcolare un'area
- Conoscere o saper ricavare la formula per il volume di un solido di rotazione
- Conoscere o saper ricavare la formula per la lunghezza di un arco
- Conoscere la definizione di valore medio integrale di una funzione
- Conoscere il teorema fondamentale del calcolo integrale e saperlo applicare

- Conoscere la definizione di integrale indefinito e saperla applicare
- Conoscere la definizione di integrale improprio e saperlo calcolare tramite i limiti

2 Indicatori di raggiungimento

Prerequisiti:

- Saper risolvere un'equazione
- Saper risolvere una disequazione
- Riconoscere la definizione a tratti della funzione valore assoluto
- Saper calcolare la derivata di una funzione
- Saper calcolare il limite di una funzione
- Associare ad una funzione il corrispondente grafico
- Interpretare graficamente la derivata di una funzione in un punto

Obiettivi di apprendimento	Classificazione di Anderson–Krahwohl	Indicatori / Descrittori	Punto della prova
Conoscere le primitive delle funzioni elementari	Riconoscere Eeguire	Lo studente riconosce il tipo di funzione elementare e la integra sostituendo una relativa primitiva, senza errori di calcolo	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8
Conoscere il metodo di integrazione per sostituzione e saperlo applicare al calcolo di una primitiva	Rievocare Classificare Implementare	Lo studente riconosce la situazione tipica di un'integrazione per sostituzione ed applica la formula correttamente	1
Conoscere il metodo di integrazione per parti e saperlo applicare al calcolo di una primitiva	Rievocare Classificare Implementare	Lo studente riconosce la situazione tipica dell'integrazione per parti ed applica la formula correttamente	2, 7
Conoscere l'interpretazione geometrica dell'integrale e saperlo utilizzare per calcolare un'area	Implementare	Lo studente imposta correttamente le formule del calcolo integrale per calcolare l'area di una superficie	4, 5
Conoscere o saper ricavare la formula per il volume di un solido di rotazione	Interpretare	Lo studente imposta correttamente la formula per calcolare il volume di un solido di rotazione	3
Conoscere o saper ricavare la formula per la lunghezza di un arco	Interpretare	Lo studente imposta correttamente la formula per calcolare la lunghezza di un arco	8
Conoscere la definizione di valore medio integrale di una funzione	Rievocare Interpretare	Lo studente riconosce la richiesta di valore medio integrale ed applica correttamente la relativa formula	6

Conoscere il teorema fondamentale del calcolo integrale e saperlo applicare	Rievocare Generare	Lo studente riconosce le ipotesi del teorema fondamentale del calcolo integrale e lo applica nello svolgimento di un integrale	5
Conoscere la definizione di integrale indefinito e saperla applicare	Interpretare Classificare Controllare	Lo studente effettua le corrette sostituzioni formali nel calcolo di un integrale indefinito	7
Conoscere la definizione di integrale improprio e saperlo calcolare tramite i limiti	Rievocare Implementare	Lo studente riconosce una situazione asintotica e imposta correttamente la risoluzione dell'integrale improprio tramite i limiti	1

3 Destinatari

La verifica è stata somministrata nel mese di Maggio ad una classe quinta del liceo scientifico *Niccolò Copernico*, con sperimentazione *piano nazionale informatica*. Questo indirizzo sperimentale non è presente nel nuovo ordinamento; ne restano attualmente solo le classi quarte e quinte, che spariranno definitivamente con l'anno accademico 2014-2015.

Rispetto ad altre classi quinte ad indirizzo tradizionale dello stesso liceo, gli studenti mostrano mediamente un livello di conoscenze e di competenza più elevato. Al suo interno la classe è comunque variegata, con studenti più o meno brillanti nell'intuizione, impegnati nello studio, responsabili nella preparazione. Non sono presenti nella classe situazioni patologiche conclamate né certificate di disturbi dell'apprendimento, né di particolari problemi della sfera psico-socio-affettiva.

La trattazione degli integrali è stata conclusa in questo mese di Maggio; la classe ha già iniziato a prepararsi con serietà in vista dell'Esame di Stato, affrontando problemi e questionari sottoposti nelle seconde prove degli anni precedenti.

4 Struttura della prova

La verifica è volta a consolidare la teoria e alcune tecniche del calcolo integrale, a verificare l'avvenuto apprendimento di sue particolari applicazioni, a preparare gli studenti alla seconda prova dell'Esame di Stato, ed a rassicurarli sulla propria preparazione. Per questi motivi, gli esercizi sono adattati, o seguono la falsariga, di precedenti seconde prove.

Per ciascun esercizio è richiesto di calcolare un integrale, che viene fornito direttamente o indirettamente dal testo. La risposta, che va comunque giustificata con i passaggi, dev'essere riportata nella casella a fianco della domanda.

5 Accorgimenti per la somministrazione

La prova viene somministrata in due ore consecutive di lezione da 55', per un tempo totale di 1 h 50'. Come nella seconda prova, agli studenti è consentito l'utilizzo (anche se non necessario) di una calcolatrice scientifica non programmabile.

Agli studenti è stato ricordato che, come nelle precedenti verifiche, le risposte vanno riportate nelle caselle a fianco delle domande corrispondenti.

I banchi sono stati separati, allineando i 21 studenti presenti in 4 file distanziate.

6 Criteri di valutazione

A ciascun esercizio è stato attribuito un punteggio nell'intervallo $[0, 10]$. Per i singoli esercizi è stata scelta un criterio di assegnazione del punteggio legato alla caratteristica principale dell'esercizio; in particolare si è dato maggiore peso all'impostazione e minore peso ad errori di forma, di calcolo o di riporto; la correttezza della risposta ha dunque influito in maniera minima.

Poiché la prova, di difficoltà paragonabile a quella dell'Esame di Stato, è stata somministrata in sole due ore, per attribuire un voto che rendesse conto agli studenti della propria preparazione si è scelta una scala che supera 10 (è stato assegnato un voto superiore, valutato come *10 e lode*). Il voto finale è stato fissato sommando i punteggi e riscalando linearmente la somma nell'intervallo $[3, 11]$, secondo la formula

$$V_f = \frac{30 + \sum_i V_i}{10} = 3 + \frac{\sum_i V_i}{10}. \quad (1)$$

Come nella quasi totalità dei problemi tipici della disciplina, ogni esercizio può essere affrontato seguendo diverse strategie risolutive. (Ad esempio, l'esercizio 5 può essere risolto calcolando una derivata e un integrale, oppure applicando il Teorema fondamentale del calcolo integrale.)

Seguendo la *forma mentis* caratteristica della disciplina e mantenendo la continuità con l'impostazione didattica stabilita con il tutor accogliente, si è scelto di non privilegiare alcuna strategia rispetto ad un'altra. In particolare, si è evitato di inserire indicazioni di forzatura.

La competenza nella scelta di una strategia è stata rilevata indirettamente senza essere valutata direttamente: il tempo necessario, le difficoltà di calcolo e i rischi di errore influiscono sufficientemente e permettono allo studente un'autovalutazione immediata delle proprie scelte strategiche.

7 Resoconto

Durante lo svolgimento della prova diversi studenti hanno manifestato perplessità per il simbolo di logaritmo (\log) diverso dalla notazione ingegneristica (\ln) cui erano stati abituati; viene spiegato alla classe di sostituire nel testo questa notazione.

Alcuni studenti hanno incontrato difficoltà a interpretare la frase “la regione delimitata dai due grafici”; vengono allora rappresentati alla lavagna i due grafici e la regione richiesta per la prosecuzione dell'esercizio.

Gli studenti hanno chiesto, ed è stato concesso, di utilizzare anche l'intervallo successivo alle due ore per la verifica. Il tempo totale di svolgimento della prova è quindi di 2 h.

I punteggi attribuiti nei singoli esercizi e il voto finale sono tabulati:

Allievi	Esercizi								Voti
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Allievo A	9	10	10	9	10	3	9	10	10
Allievo B	0	8	7	1	0	5	0	2	5 +
Allievo C	0	7	10	10	10	2	10	10	9
Allievo D	9	10	3	9	3	10	9	6	9
Allievo E	2	10	4	7	0	3	0	0	5 1/2
Allievo F	0	2	7	7	10	1	0	8	6 1/2
Allievo G	10	0	10	9	10	3	9	0	8 +
Allievo H	10	10	10	10	10	9	10	10	10 lode
Allievo I	10	10	10	6	0	0	0	5	7 +
Allievo L	0	5	3	0	3	0	0	0	4
Allievo M	0	8	9	9	0	9	0	7	7 +
Allievo N	0	5	3	0	10	2	0	0	5
Allievo O	0	0	8	0	3	7	0	0	5
Allievo P	0	7	4	0	0	2	5	0	5 -
Allievo Q	10	5	0	3	0	5	3	9	6 1/2
Allievo R	0	0	2	0	7	2	0	6	4 /5
Allievo S	0	0	3	3	0	0	3	0	4
Allievo T	0	7	8	0	3	3	0	8	6
Allievo U	10	10	10	10	10	10	9	3	10
Allievo V	0	7	7	9	0	3	0	8	6 1/2
Allievo Z	0	7	0	3	10	3	0	7	6

I voti non hanno sorpreso il tutor accogliente, che li ha trovati in linea con le usuali prestazioni degli alunni.

8 Analisi dei dati

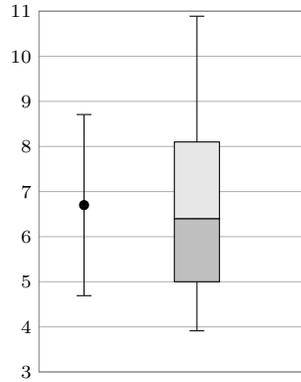
8.1 Analisi statistica

Tutti i dati sono approssimati alla seconda cifra decimale.

I principali indicatori statistici per i voti sono tabulati e illustrati dai due diagrammi.

Primo quartile	5
Mediana	6,4
Terzo quartile	8,1
Scarto interquartile	3,1
Media	6,70
Varianza	4,10
Scarto tipo	2,02
Asimmetria	0,65
Curtosi	-0,62

Indicatori di centralità e variabilità

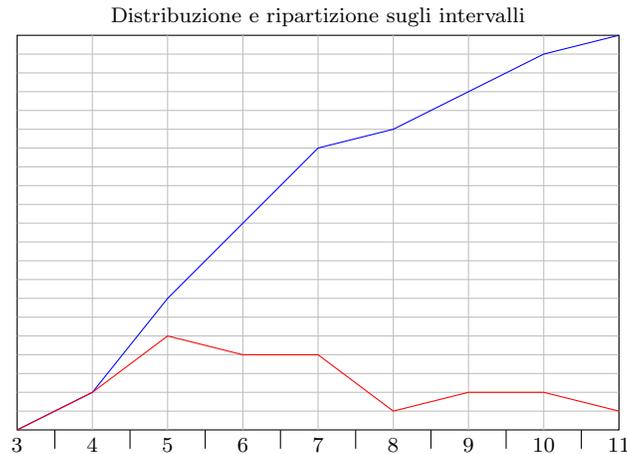


I voti possono essere raccolti negli intervalli di approssimazione ad un intero n , prendendo come rappresentante n stesso.

Intervallo	Rappresentante	Numerosità		Frequenza	
		semplice	cumulata	semplice	cumulata
[3; 3,5 [3	0	0	0,00	0,00
[3,5; 4,5 [4	2	2	0,10	0,10
[4,5; 5,5 [5	5	7	0,24	0,33
[5,5; 6,5 [6	4	11	0,19	0,52
[6,5; 7,5 [7	4	15	0,19	0,71
[7,5; 8,5 [8	1	16	0,05	0,76
[8,5; 9,5 [9	2	18	0,10	0,86
[9,5; 10,5 [10	2	20	0,10	0,95
[10,5; 11]	11	1	21	0,05	1,00

Possiamo ora tabulare i principali indicatori statistici dei voti sugli intervalli, e rappresentare la loro distribuzione (*distribuzione semplice*) e la loro ripartizione (*distribuzione cumulata*).

Indicatori	Voti	Intervalli
Moda	–	5
Primo quartile	5	5
Mediana	6,4	6
Terzo quartile	8,1	8
Scarto interquartile	3,1	3
Media	6,70	6,76
Varianza	4,10	3,99
Scarto tipo	2,02	2,00
Asimmetria	0,65	0,63
Curtosi	–0,62	–0,58



8.2 Indice di difficoltà e potere discriminante

- Per un esercizio a valutazione dicotomica (*giusto-sbagliato*) l'**indice di difficoltà** è calcolato come il rapporto tra il numero di risposte giuste (G) e il numero di studenti (N), ovvero come la media dei punteggi, mentre il **potere discriminante** è calcolato come il prodotto tra numero di risposte giuste e numero di risposte errate (E), rapportato al quadrato degli studenti e normalizzato all'intervallo $[0, 1]$.

- L'indice di difficoltà

$$ID = \frac{N_{\text{giuste}}}{N_{\text{totale}}}$$

è compreso tra 0 e 1; un valore prossimo a 1 indica un esercizio semplice, che molti studenti hanno risolto correttamente; un valore prossimo a 0 indica un esercizio difficile, che molti studenti hanno sbagliato.

- Il potere discriminante

$$PD = 4 \cdot \frac{N_{\text{giuste}} \cdot N_{\text{sbagliate}}}{(N_{\text{totale}})^2}$$

è compreso tra 0 e 1; un valore prossimo a 1 indica un esercizio cui gli studenti hanno risposto dividendosi in due gruppi quasi della stessa numerosità; un valore prossimo a 0 indica un esercizio con poco potere discriminante, cui molti studenti hanno dato la stessa risposta.

- Avendo preferito evitare la logica binaria *giusto-sbagliato* in favore di una scala più estesa di punteggi nell'intervallo $[0, 1]$, non possiamo utilizzare queste definizioni per calcolare l'indice di difficoltà, né il potere discriminante degli esercizi.
- Possiamo decidere di approssimare a 0 o a 1 i punteggi, in funzione dell'intervallo in cui cadono. Questa scelta sarebbe tuttavia arbitraria, ed essendo compiuta dopo il campionamento dei dati non avrebbe alcun valore statistico.
- Dopo aver riscalato linearmente i punteggi all'intervallo $[0, 1]$, utilizziamo come *indice di centralità* la loro **media osservata** $\bar{\mu}$, e come *indice di variabilità* il loro **scarto tipo osservato** $\bar{\sigma}$,

$$\bar{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mu})^2}{n - 1}}.$$

- La media osservata fornisce una misura della difficoltà dell'esercizio, assumendo valori compresi tra 0 e 1: un valore prossimo a 0 indica un esercizio difficile, che mediamente ha fornito

un punteggio basso; un valore prossimo a 1 indica un esercizio facile, che mediamente ha fornito un punteggio alto.

- Lo scarto tipo osservato fornisce una misura del potere discriminante dell'esercizio, assumendo valori compresi tra 0 e σ_{\max} : un valore prossimo a 0 indica un esercizio con poco potere discriminante, per cui quasi tutti hanno ricevuto lo stesso punteggio; un valore prossimo a σ_{\max} indica un esercizio a cui quasi tutti hanno fornito una risposta completamente giusta o completamente sbagliata.
- Poiché in un esercizio a valutazione dicotomica lo scarto tipo osservato è desumibile dalla media osservata,

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{n\bar{\mu}(1-\bar{\mu})}{n-1}}$$

possiamo precisare il rapporto tra lo scarto tipo osservato e il valore massimo: un esercizio con un rapporto prossimo a 1 è maggiormente dicotomico, uno con un valore prossimo a 0 è più uniformizzante, uno con un valore intermedio indica diverse gradazioni nelle risposte.

- L'analisi statistica dei dati può inoltre essere condotta sugli usuali indici: la varianza, l'asimmetria, la curtosi.
- In alternativa, possiamo prendere come *indice di centralità* la **mediana** m e come *indice di variabilità* lo **scarto interquartile** IQR,

$$m = q_{1/2},$$

$$\text{IQR} = q_{3/4} - q_{1/4}.$$

- La mediana e i quartili sono *quantili* di indici $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, ovvero dividono il campione in quattro gruppi di uguale numerosità, per valore crescente di punteggio (o approssimando linearmente i valori intermedi)

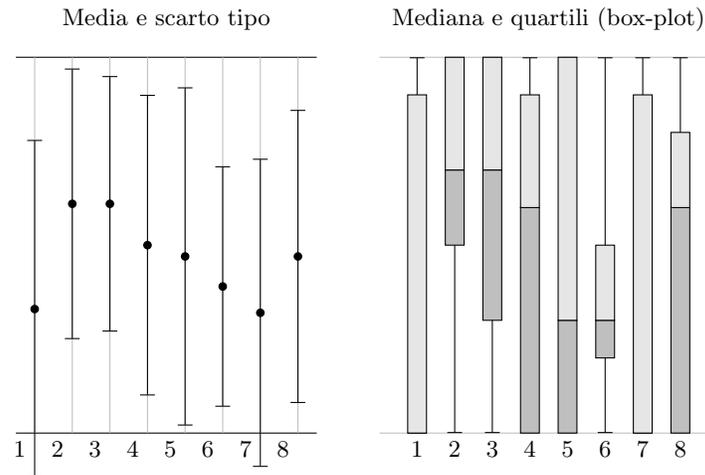
$$\underbrace{\xi_1 \geq \dots \geq \xi_5}_{q_{1/4}} \geq \underbrace{\xi_6 \geq \dots \geq \xi_{10}}_{q_{1/2}} \geq \xi_{11} \geq \underbrace{\xi_{12} \geq \dots \geq \xi_{16}}_{q_{3/4}} \geq \underbrace{\xi_{17} \geq \dots \geq \xi_{21}}_{q_{3/4}}$$

$$q_{1/4} = \frac{\xi_5 + \xi_6}{2}$$

$$q_{1/2} = \xi_{11}$$

$$q_{3/4} = \frac{\xi_{16} + \xi_{17}}{2}$$

Indicatori statistici (centralità, variabilità, ...)								
Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8
Media osservata	0,33	0,61	0,61	0,50	0,47	0,39	0,32	0,47
Scarto tipo massimo	0,47	0,49	0,49	0,50	0,50	0,49	0,47	0,50
Scarto tipo osservato	0,45	0,36	0,34	0,40	0,45	0,32	0,41	0,39
Rapporto	0,96	0,74	0,70	0,81	0,89	0,65	0,88	0,77
Varianza osservata	0,21	0,13	0,12	0,16	0,20	0,10	0,17	0,15
Asimmetria osservata	0,75	-0,67	-0,33	-0,10	0,19	0,83	0,77	-0,09
Curtosi osservata	-1,5	-0,86	-1,33	-1,84	-1,92	-0,48	-1,32	-1,70
Mediana	0	0,7	0,7	0,6	0,3	0,3	0	0,6
Scarto interquartile	0,9	0,5	0,7	0,9	1	0,3	0,9	0,8
Primo quartile	0	0,5	0,3	0	0	0,2	0	0
Terzo quartile	0,9	1	1	0,9	1	0,5	0,9	0,8



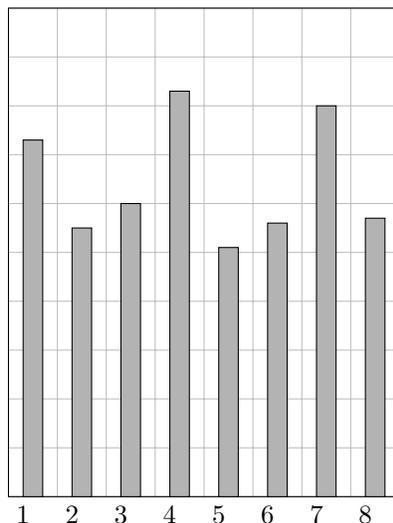
8.3 Indice di selettività

- Negli esercizi a valutazione dicotomica l'**indice di selettività** è utilizzato per calcolare una correlazione tra il punteggio degli studenti in un esercizio e il voto finale; si calcola scegliendo una porzione dei voti più alti ed un'uguale porzione dei voti più bassi, calcolando la differenza tra i punteggi attribuiti ai primi ed ai secondi nel singolo esercizio, quindi riscalandolo sul totale in modo da ottenere un valore nell'intervallo $[-1, 1]$.
- Un indice di selettività prossimo a 1 caratterizza un esercizio tipico, la cui soluzione esatta è stata fornita prevalentemente dagli studenti che hanno ottenuto i punteggi finali più alti; un indice di selettività prossimo a -1 caratterizza un esercizio anomalo, che ha ricevuto una risposta sbagliata prevalentemente dagli studenti che hanno ottenuto un voto più alto; un indice di selettività prossimo a 0 caratterizza un esercizio scorrelato, la correttezza delle cui soluzioni può apparire indipendente dal voto finale.
- Avendo scelto di attribuire punteggi nell'intervallo $[0, 1]$, non possiamo utilizzare l'indice di selettività. Possiamo però utilizzare un *indice di correlazione* più fine, come l'**indice di correlazione di Pearson** $\rho_{X,Y}$,

$$\rho_{X,Y} = \frac{\bar{\sigma}_{X,Y}}{\bar{\sigma}_X \cdot \bar{\sigma}_Y} = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mu}_X)(y_i - \bar{\mu}_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mu}_X)^2 \cdot \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{\mu}_Y)^2}}$$

- L'indice di correlazione di Pearson è invariante per riscalamento lineare dei campioni. In altri termini, il suo valore non varia se i valori vengono riportati su una diversa scala.
- L'indice di correlazione di Pearson assume un valore nell'intervallo $[-1, 1]$. Un valore prossimo a 1 suggerisce una forte correlazione positiva; un valore prossimo a -1 suggerisce una forte correlazione negativa; un valore prossimo a 0 suggerisce l'assenza di una correlazione, ed un'eventuale indipendenza.
- Dai calcoli risulta che tutti gli esercizi (in particolare gli esercizi 1, 4 e 7) hanno una marcata correlazione positiva con il punteggio finale.

Indice di correlazione di Pearson



Indice di correlazione di Pearson									
Alunni	Esercizi								Somma
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Allievo A	9	1	1	9	10	3	9	10	70
Allievo B	0	8	7	1	0	5	0	2	23
Allievo C	0	7	10	10	10	2	10	10	59
Allievo D	9	10	3	9	3	10	9	6	59
Allievo E	2	10	4	7	0	3	0	0	26
Allievo F	0	2	7	7	10	1	0	8	35
Allievo G	10	0	10	9	10	3	9	0	51
Allievo H	10	10	10	10	10	9	10	10	79
Allievo I	10	10	10	6	0	0	0	5	41
Allievo L	0	5	3	0	3	0	0	0	11
Allievo M	0	8	9	9	0	9	0	7	42
Allievo N	0	5	3	0	10	2	0	0	20
Allievo O	0	0	8	0	3	7	0	0	18
Allievo P	0	7	4	0	0	2	5	0	18
Allievo Q	10	5	0	3	0	5	3	9	35
Allievo R	0	0	2	0	7	2	0	6	17
Allievo S	0	0	3	3	0	0	3	0	9
Allievo T	0	7	8	0	3	3	0	8	29
Allievo U	10	10	10	10	10	10	9	3	72
Allievo V	0	7	7	9	0	3	0	8	34
Allievo Z	0	7	0	3	10	3	0	7	30
Indice	0,73	0,55	0,60	0,83	0,51	0,56	0,80	0,57	

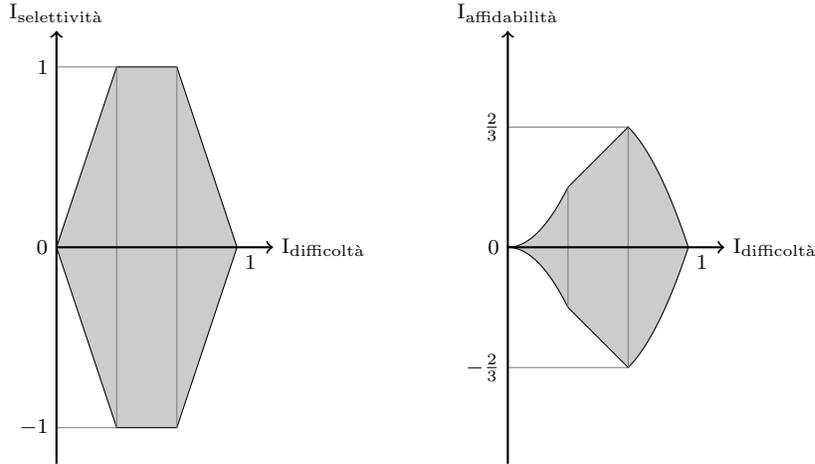
8.4 Indice di affidabilità

- Per valutazioni dicotomiche, l'indice di affidabilità di un esercizio è calcolato come il prodotto tra gli indici di difficoltà e di selettività,

$$I_{\text{affidabilità}} = I_{\text{difficoltà}} \cdot I_{\text{selettività}}$$

- L'indice di affidabilità assume valori nell'intervallo $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. Un valore negativo indica un indice di selettività negativo, ovvero una correlazione negativa tra i risultati in quell'esercizio

e i risultati nella prova; un valore prossimo a 0 indica una difficoltà o una selettività prossime a zero, ovvero un esercizio molto difficile o il cui punteggio è poco correlato al punteggio dell'intera prova; un valore prossimo a $\frac{2}{3}$ indica un esercizio la cui risposta è stata esatta sostanzialmente dai due terzi della classe che hanno ottenuto un punteggio globale più alto.

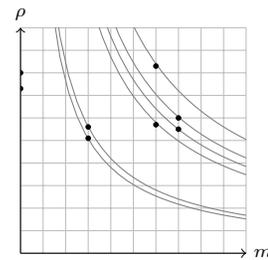
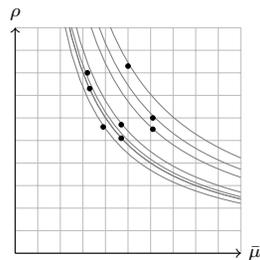


- Avendo preso come indici di centralità (difficoltà) la media osservata $\bar{\mu}$ e la mediana m , e come indice di correlazione (selettività) l'indice di correlazione di Pearson ρ , possiamo utilizzare il loro prodotto per rappresentare l'indice di affidabilità di ciascun esercizio. Più precisamente, poichè stiamo cercando di mediare tra i due valori, utilizziamo le più naturali medie geometriche $M_0(\bar{\mu}, \rho)$ e $M_0(m, \rho)$,

$$M_0(\bar{\mu}, \rho) = \sqrt{\bar{\mu} \cdot \rho},$$

$$M_0(m, \rho) = \sqrt{m \cdot \rho}.$$

Indici di affidabilità								
Esercizi	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{\mu}$	0,33	0,61	0,61	0,50	0,47	0,39	0,32	0,47
m	0	0,7	0,7	0,6	0,3	0,3	0	0,6
ρ	0,73	0,55	0,60	0,83	0,51	0,56	0,80	0,57
$M_0(\bar{\mu}, \rho)$	0,49	0,58	0,61	0,65	0,49	0,47	0,50	0,52
$M_0(m, \rho)$	0	0,62	0,65	0,71	0,39	0,41	0	0,59

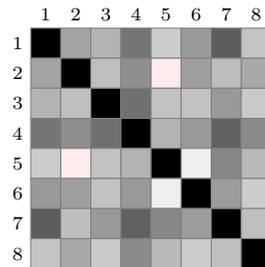


8.5 Correlazione statistica

- L'indice di correlazione di Pearson può essere calcolato tra due esercizi, evidenziandone possibili similitudini, o indipendenza, o complementarità. Calcolando l'indice di correlazione tra tutte le coppie di esercizi si ottiene la *matrice di correlazione*.

Matrice di correlazione								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,00	0,36	0,30	0,54	0,20	0,40	0,64	0,23
2	0,36	1,00	0,25	0,44	-0,08	0,38	0,26	0,34
3	0,30	0,25	1,00	0,56	0,24	0,24	0,40	0,21
4	0,54	0,44	0,56	1,00	0,30	0,40	0,62	0,46
5	0,20	-0,08	0,24	0,30	1,00	0,06	0,47	0,27
6	0,40	0,38	0,24	0,40	0,06	1,00	0,39	0,20
7	0,64	0,26	0,40	0,62	0,47	0,39	1,00	0,25
8	0,23	0,34	0,21	0,46	0,27	0,20	0,25	1,00

Matrice di correlazione, illustrata con tonalità di rosso (-1), bianco (0), nero (1)



- Un indice di correlazione negativo (*rosso in figura*) tra due esercizi caratterizza esercizi complementari: molti studenti che hanno risolto correttamente uno dei due esercizi non hanno saputo risolvere l'altro, e viceversa. Un indice di correlazione prossimo a 0 (*bianco*) caratterizza esercizi scorrelati, eventualmente indipendenti: gli studenti non mostrano correlazione tra la risposta corretta all'uno o all'altro esercizio (neppure una correlazione di studio). Un indice di correlazione prossimo a 1 (*nero*) tra due esercizi caratterizza esercizi troppo simili tra loro, che molti studenti hanno risolto correttamente in coppia.
- Ad eccezione delle coppie {5, 2} e {5, 6} che presentano correlazioni molto deboli, tutte le coppie di esercizi hanno un indice di correlazione di Pearson compreso tra 0,2 e 0,7. Manifestano dunque una correlazione positiva, marcata ma non eccessiva.
- L'indice di correlazione di Pearson può essere calcolato anche per gli studenti rispetto alla media della classe.

Indice di correlazione di Pearson										
	1	2	3	4	5	6	7	8	Somma	Indice
A	9	10	10	9	10	3	9	10	70	0,40
B	0	8	7	1	0	5	0	2	23	0,73
C	0	7	10	10	10	2	10	10	59	0,45
D	9	10	3	9	3	10	9	6	59	-0,38
E	2	10	4	7	0	3	0	0	26	0,64
F	0	2	7	7	10	1	0	8	35	0,52
G	10	0	10	9	10	3	9	0	51	-0,26
H	10	10	10	10	10	9	10	10	79	0,26
I	10	10	10	6	0	0	0	5	41	0,52
L	0	5	3	0	3	0	0	0	11	0,77
M	0	8	9	9	0	9	0	7	42	0,65
N	0	5	3	0	10	2	0	0	20	0,40
O	0	0	8	0	3	7	0	0	18	0,26
P	0	7	4	0	0	2	5	0	18	0,34
Q	10	5	0	3	0	5	3	9	35	-0,41
R	0	0	2	0	7	2	0	6	17	0,11
S	0	0	3	3	0	0	3	0	9	0,10
T	0	7	8	0	3	3	0	8	29	0,74
U	10	10	10	10	10	10	9	3	72	0,04
V	0	7	7	9	0	3	0	8	34	0,73
Z	0	7	0	3	10	3	0	7	30	0,35
Somma	70	128	128	105	99	82	67	99		
Indice	0,73	0,55	0,60	0,83	0,51	0,56	0,80	0,57		

- Osserviamo infine che l'esigua numerosità del campione statistico ci richiede di non attribuire particolare significato ai valori calcolati, che vanno interpretati *cum grano salis*. Ad esempio, ci mette in guardia l'indice di correlazione superiore a 0,5 calcolato tra il voto e il numero di lettere A nel cognome, che sui dati campionati presentano una marcata correlazione positiva.

9 Indicazioni per il recupero

Svolta alla fine dell'anno scolastico, la verifica non lascia molto tempo per un recupero. Fortunatamente la trattazione dei principali punti del programma è già stata completata e, come previsto, le lezioni restanti saranno dedicate al recupero e al potenziamento, in vista dell'Esame di Stato.

Non è stata evidenziata alcuna lacuna grave pregressa, segno che gli obiettivi minimi oggetto delle verifiche precedenti sono stati essenzialmente recuperati.

Gli errori sono stati indicati sui compiti, e la consegna è stata accompagnata da commenti sugli errori più gravi per ciascuno studente.

10 Autoriflessione

Come già indicato, i voti attribuiti agli studenti sono in linea con le prestazioni rilevate durante l'anno.

Sulla base degli indicatori, gli esercizi risultano nel complesso soddisfacenti.

L'esercizio 4 sembra il più caratteristico, essendo indicato avere difficoltà media, un forte potere discriminante, una forte correlazione positiva con il voto finale e una marcata correlazione positiva con gli altri esercizi.

Gli esercizi 1 e 7 sembrano essere particolarmente difficili, ma avere un forte potere discriminante; questo suggerisce di porre particolare attenzione agli argomenti trattati e agli errori compiuti dagli studenti.

L'esercizio 5 sembra essere il più anomalo, con una difficoltà media, n forte potere discriminante, ma una (relativamente) bassa correlazione con il voto e con gli altri esercizi. La sua inclusione è comunque voluta e dovrebbe essere ripetuta, poiché più degli altri ha permesso di porre in atto le competenze degli studenti: chi ha ricordato, riconosciuto e saputo applicare il Teorema fondamentale del calcolo integrale ha potuto identificare direttamente la soluzione, senza impegnarsi in una serie di procedimenti meccanici la cui lunghezza aumenta il rischio di errori.

I problemi che si sono manifestati riguardo l'interpretazione del testo potrebbero essere evitati, ma sono anche un adeguato terreno di prova per interpretare i problemi che verranno somministrati all'Esame di Stato.

Negli esercizi 5 e 7, poiché la confusione tra la notazione scientifica e la notazione ingegneristica del logaritmo è alimentata dalle calcolatrici e da diversi libri di testo, non si ritiene opportuno insistere sulla loro distinzione ad un mese dall'Esame di Stato, dove non verrà richiesta. Prima di riproporre la verifica ad un'altra classe bisognerà verificare quale notazione abbiano appreso, ed eventualmente abbandonare la proprietà in favore della chiarezza.

Nell'esercizio 3, invece, il testo non va cambiato, essendo tratto da una seconda prova di Esame di Stato: è bene che gli studenti abbiano modo di confrontarsi con queste formulazioni ed eventualmente di sbagliare, poiché questi errori avvengono in una verifica formativa e non ancora certificativa.

A Testo della verifica

Verifica di matematica

02/05/2013

V AS

1. Calcolare

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

2. Calcolare

$$\int_0^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} dx$$

3. Sia \mathbf{D} la regione del primo quadrante delimitata dai grafici delle funzioni $f(x) = \frac{2}{x}$ e $g(x) = -x + 3$. Calcolare il volume del solido di rotazione generato da \mathbf{D} nella rotazione completa intorno all'asse delle ascisse.

4. Sia γ la curva di equazione $y = \frac{3-x}{2x}$. Calcolare l'area Ω della parte di piano limitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti $(1, 1)$ e $(3, 0)$.

5. Sia $f(x) = \log \sqrt{x^2 - 4}$. Calcolare l'area della superficie piana delimitata dal grafico della funzione derivata $f'(x)$, dall'asse delle ascisse, e dalle rette di equazioni $x = 3$ e $x = 4$.

6. Calcolare il valore medio della funzione $f(x) = |1 - x^2|$ nell'intervallo $-2 \leq x \leq 3$

7. Calcolare

$$\int_x^{2x} t \log t dt$$

8. Sia γ la curva di equazione $y = x\sqrt{x}$. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i due punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.