

A.S.2012/2013
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO
T.F.A. – TIROCINIO FORMATIVO ATTIVO

Analisi di una prova di valutazione di trigonometria

Corso di Docimologia
Prof. R. Trincherò

Indice

- Collocazione didattica pag. 3
- Obiettivi di apprendimento pag. 5
- Struttura della prova e modalità di somministrazione pag. 5
- Obiettivi cognitivi e descrittori di raggiungimento pag. 6
- Testo della prova e correttore pag. 8
- Criteri di scoring pag. 14
- Griglia di valutazione pag. 15
- Analisi dei dati emersi dalla correzione della prova pag. 17
- Distribuzioni di frequenza dei voti finali pag. 18
- Analisi degli item pag. 20
- Indicazioni per il recupero pag. 25
- Auto-riflessione sull'esperienza pag. 25

1. Collocazione didattica

La prova di verifica è stata somministrata in una classe IV di un liceo socio-psico-pedagogico. Tale classe è l'ultima dell'ordinamento pre-riforma, il cui piano di studi prevede 3 ore di matematica dalla prima alla quinta e lo studio della fisica solo il quarto anno, con 4 ore settimanali. Ora tale indirizzo di studi ha il nome di "liceo delle scienze umane" e il numero di ore settimanali di matematica e fisica del quarto anno è notevolmente cambiato: 4 ore (2 di matematica e 2 di fisica), anziché 7. Tale cambiamento è stato fatto nell'ottica di una continuità maggiore nello sviluppo delle due discipline durante i cinque anni, come l'introduzione della fisica già il terzo anno e la sua continuazione il quinto anno.

La classe è composta da 19 allievi, 18 ragazze ed un ragazzo. Non ci sono portatori di handicap, né ragazzi che presentano disturbi specifici dell'apprendimento.

La verifica è stata proposta nell'Aprile 2013, come terza prova di valutazione scritta del secondo quadrimestre e prova conclusiva dell'unità didattica. Si sono voluti verificare la comprensione degli argomenti trattati e la capacità da parte degli studenti di una loro applicazione.

Nell'unità didattica è stato affrontato il tema della trigonometria. Tale unità didattica è stata sviluppata in 10 h di lezione, così suddivise:

- lezione frontale (3h)
- lezione interattiva (2h)
- problem solving (3h)
- lezione con uso di software di geometria (2h).

La classe presenta un livello di competenza generale medio-basso, ai ragazzi manca la capacità di indurre da situazioni geometriche particolari a considerazioni di tipo generale e, conseguentemente, supplisce la capacità di problem solving. Nonostante questo risulta buona la capacità di manipolare espressioni algebriche e numeriche e la capacità di usare programmi di geometria dinamica.

L'argomento è stato dapprima trattato collegandolo alla fisica. I ragazzi infatti avevano già affrontato la risoluzione di triangoli rettangoli nel contesto dei vettori, della cinematica e della dinamica (studio del moto bidimensionale, calcolo della risultante di più forze, studio della meccanica del piano inclinato): tutti temi affrontati nel secondo bimestre del primo quadrimestre e nel primo bimestre del secondo quadrimestre e ancora utilizzati per la risoluzione di problemi sull'energia.. Sono poi stati introdotti i teoremi sui triangoli obliquangoli. Infine sono stati presentate ai ragazzi varie applicazioni alla vita reale di tali concetti.

Qui di seguito le valutazioni finali del primo quadrimestre :

allievo	Valutazione I quadrimestre
1	8
2	6
3	6
4	5
5	7
6	6
7	7
8	7
9	4
10	5
11	6
12	7
13	9
14	8
15	6
16	8
17	5
18	6
19	6

I prerequisiti per l'unità didattica sono:

- misura dell'ampiezza di un angolo in gradi e radianti
- conoscenza delle funzioni goniometriche
- conoscenza delle relazioni fondamentali tra le funzioni goniometriche e delle formule di addizione, sottrazione, duplicazione
- conoscenza dei metodi di soluzione delle equazioni goniometriche elementari e lineari
- algebra dei vettori
- forze e piano inclinato
- teorema di Pitagora
- conoscenza delle figure piane regolari
- similitudini

Gli argomenti trattati nell'unità didattica sono stati:

- teoremi sui triangoli rettangoli
- risoluzione dei triangoli rettangoli
- applicazioni dei teoremi sui triangoli rettangoli: area di un triangolo, teorema della corda
- teoremi sui triangoli obliquangoli: teorema dei seni, teorema di Carnot o del coseno
- risoluzione dei triangoli obliquangoli

2. Obiettivi di apprendimento

Vengono qui elencati gli obiettivi generali dell'unità didattica. Per obiettivi specifici si intendono gli obiettivi riguardanti la disciplina, per obiettivi generali si intendono gli obiettivi interdisciplinari.

Obiettivi specifici:

1. saper riconoscere il significato geometrico delle funzioni goniometriche;
2. saper applicare la trigonometria alla risoluzione di problemi riguardanti i triangoli;
3. saper applicare la trigonometria a problemi riguardanti i vettori;
4. saper applicare la trigonometria a problemi riguardanti le forze;
5. saper applicare la trigonometria a problemi riguardanti il piano inclinato;
6. saper interpretare il testo di un problema e tradurlo in linguaggio matematico appropriato;
7. saper assegnare l'incognita opportuna ad un problema;
8. saper assegnare i valori di validità di una variabile;
9. saper riconoscere il significato della soluzione di un problema;
10. saper fornire un'interpretazione grafica di un problema;
11. saper riconoscere le condizioni entro le quali utilizzare i teoremi sui triangoli rettangoli;
12. saper riconoscere le condizioni entro le quali utilizzare il teorema dei seni;
13. saper riconoscere le condizioni entro le quali utilizzare il teorema di Carnet.

Obiettivi trasversali:

1. applicare ragionamenti di tipo deduttivo;
2. saper interpretare il testo di un problema;
3. acquisire la capacità di esplorare alla ricerca di nuovi legami e significati;
4. acquisire una modalità complessa di vedere lo stesso oggetto sotto punti di vista diversi;
5. saper utilizzare un software per il raggiungimento di obiettivi specifici;
6. saper verificare le proprie ipotesi tramite l'utilizzo di un software;
7. saper verificare le proprie ipotesi tramite discussione con i compagni;
8. riconoscere la trigonometria come strumento utile per la comprensione di fenomeni meccanici;
9. riconoscere la trigonometria come strumento utile per la risoluzione di problemi della vita reale.

3. Struttura della prova e modalità di somministrazione

La prova di verifica è stata assegnata in conclusione dell'unità didattica, dopo una lezione dedicata al chiarimento dei dubbi rimasti ai ragazzi sia sul lavoro svolto in classe, sia su una scheda di problemi lasciata agli studenti da svolgere a casa.

Il tempo per l'esecuzione della prova è stato di 2 ore: un'ora di 55 minuti e un'ora di 50 minuti. Ai ragazzi è stato dato il testo scritto della verifica, in calce al testo c'erano le indicazioni dei punteggi relativi a ciascun esercizio.

Ai ragazzi è stato concesso l'uso della calcolatrice.

La verifica è strutturata in 8 problemi, ciascuno volto a misurare il raggiungimento di uno o più obiettivi cognitivi.

Il punteggio di ciascun problema dipende sia dal tempo necessario a risolverlo, sia dal grado di difficoltà.

I problemi dall'1 al 7 (come si può vedere dai punteggi nella tabella [1]) sono di lunghezza piuttosto ridotta e difficoltà nel complesso omogenee. Fa eccezione il problema 8, pensato per il raggiungimento dell'eccellenza.

Si è evitato di ordinare i problemi in ordine crescente di difficoltà. Si è pensato inoltre più opportuno non somministrare problemi strutturati a più punti, che sommino uno dopo l'altro le competenze di quello precedente.

Tuttavia i problemi seguono modelli diversi: i problemi 1-3-4-5-7 sono prettamente geometrici, i problemi 2 -8 sono collegati alla vita reale, il problema 6 si ricollega alla fisica.

Non ci sono state incomprensioni da parte dei ragazzi riguardo al testo della prova, solamente alcuni ragazzi hanno richiesto quale fosse la modalità migliore con la quale presentare i risultati (numeri approssimati, radici quadrate esplicitate, angoli in radianti o in gradi sessagesimali).

Nessuno studente non è riuscito a completare la prova per mancanza di tempo.

4. Obiettivi cognitivi e descrittori di raggiungimento

La prova presenta 8 problemi, ciascuno volto a verificare il raggiungimento di uno o più obiettivi cognitivi.

PROBLEMA	OBIETTIVO COGNITIVO	DESCRITTORE	CLASSIFICAZIONE ANDERSON E KRATHWOHL
1	Riconoscere i teoremi che legano gli angoli e i lati di un triangolo rettangolo	Lo studente conosce i teoremi sui triangoli rettangoli e sa utilizzarli per la risoluzione di un triangolo	Ricordare – applicare
2	Riconoscere i teoremi che legano i lati di un triangolo rettangolo e le formule goniometriche inverse	Lo studente riconosce il significato di pendenza e applica i teoremi sui triangoli rettangoli.. Lo studente conosce le funzioni goniometriche inverse, utilizzandole per trovare un angolo.	Comprendere - applicare
3	Riconoscere il teorema per il calcolo delle aree . Riconoscere il I teorema fondamentale della goniometria.	Lo studente conosce il teorema per il calcolo delle aree, lo utilizza e calcola le variabili mancanti rifacendosi al I teorema	Applicare - eseguire

		fondamentale della goniometria	
4	Riconoscere il teorema dei seni. Riconoscere le relazioni fra le funzioni goniometriche. Saper calcolare i valori delle funzioni goniometriche di archi particolari. Saper riconoscere le formule goniometriche .	Lo studente riconosce il teorema da utilizzare e sa calcolare le variabili mancanti mediante l'uso della goniometria. Lo studente sa calcolare il valore di un angolo ignoto e, mediante le formule goniometriche, sa calcolare il valore del seno di tale angolo.	Ricordare – comprendere
5	Riconoscere il teorema di Carnot. Saper assegnare un'incognita e le sue condizioni di validità	Lo studente conosce il teorema di Carnot. Lo studente sa assegnare un'incognita, sa valutare l'intervallo entro il quale può variare l'incognita, sa riconoscere quale soluzione è quella esatta	Valutare - analizzare
6	Riconoscere le applicazioni della trigonometria alla fisica del piano inclinato	Lo studente sa rappresentare un problema fisico come problema geometrico, riconosce i teoremi sui triangoli rettangoli e sa applicare definizioni fisiche per la risoluzione di problemi geometrici	Analizzare - inferire
7	Riconoscere il teorema della corda. Applicare le formule goniometriche	Lo studente conosce il teorema della corda. Lo studente applica le formule goniometriche opportune per il calcolo dei dati mancanti	Ricordare - comprendere
8	Saper analizzare un testo complesso. Saper rappresentare geometricamente una situazione reale. Conoscere i teoremi della trigonometria. Saper valutare l'esattezza di una soluzione	Lo studente sa analizzare e rappresentare una situazione complessa traducendola in un problema di trigonometria. Lo studente conosce i teoremi sui triangoli . lo studente riconosce l'esattezza o meno di una soluzione	Analizzare – valutare – comprendere - ricordare

5. Testo della prova e correttore

1. In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 10 cm e l'angolo opposto ad esso è di 40° . Trova il perimetro del triangolo.
2. In un cartello stradale si legge: "pendenza del 14 % ". Percorrendo un tratto di 280 m, quanto si sale in altezza? Che angolo forma la strada con il piano orizzontale?
3. In un triangolo due lati sono lunghi 26 cm e 46 cm. L'angolo compreso tra essi ha il coseno uguale a $\frac{12}{13}$. Determina l'area del triangolo.
4. Determina il perimetro del parallelogramma ABCD di base AB, sapendo che $\overline{BD} = 12$, $\hat{DAB} = \frac{\pi}{3}$ e $\hat{ABD} = \frac{\pi}{4}$.
5. Nel triangolo ABC il lato AB supera di 4 cm il lato AC. Inoltre $\hat{BAC} = 120^\circ$ e $\overline{BC} = 14$ cm. Trova le lunghezze dei lati AC e AB.
6. Un corpo pesa 850 N ed è appoggiato su un piano inclinato senza attrito. Per tenerlo in equilibrio è necessaria una forza $F = 150$ N parallela al piano. Determina l'inclinazione α del piano.
7. Il triangolo acutangolo ABC è inscritto in una circonferenza di raggio 5; la misura del lato AB è $5\sqrt{3}$ e quella del lato AC è 8. Calcola l'area del triangolo.
8. Alcuni amici in estate affittano una casa in montagna per fare trekking. Da una delle finestre vedono la stazione di partenza dell'ovovia e, esattamente nella stessa direzione, la cima della montagna da raggiungere. Gli amici vogliono valutare l'altezza della montagna, ma non hanno a disposizione una cartina; per risolvere il problema Camilla propone di misurare gli angoli con cui è possibile vedere la cima rispettivamente dalla base della casa (piano terra) e dalla stazione di partenza dell'ovovia.
Sapendo che la distanza fra la casa e l'ovovia è di 1000 m e che l'angolo misurato dalla casa è di 35° circa, mentre quello misurato dalla stazione dell'ovovia è di 50° circa, quanto è alta la montagna rispetto al livello della casa? (Supponi che casa e ovovia si trovino alla stessa altitudine)

- Correttore

❖ *Problema 1*

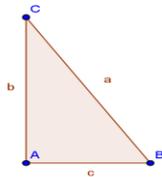
$$\overline{AB} = 10\text{cm}$$

$$\widehat{ACB} = 40^\circ$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}\widehat{ACB}} = \frac{10}{\text{sen}40^\circ} \text{cm} = 16\text{cm}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \cos 40^\circ = 12\text{cm}$$

$$2P(ABC) = (10 + 16 + 12)\text{cm} = 38\text{cm}$$



❖ *Problema 2*

$$\text{pendenza} = 14\%$$

$$l = 280\text{m}$$

$$14\% = 0,14 = \frac{h}{l}$$

$$h = 0,14 \cdot l = 0,14 \cdot 280\text{m} = 39,2\text{m}$$

$$\alpha = \text{arcsen}(0,14) = 8^\circ$$



❖ Problema 3

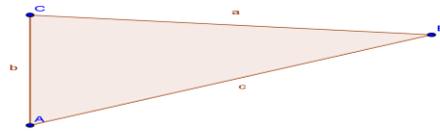
$$\overline{AC} = 26\text{cm}$$

$$\overline{BC} = 46\text{cm}$$

$$\cos \hat{A}CB = \frac{12}{13}$$

$$\text{sen} \hat{A}CB = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{A}CB} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \pm \frac{5}{13} = + \frac{5}{13}$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen} \hat{A}CB = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 46 \cdot \frac{5}{13} \text{cm}^2 = 230\text{cm}^2$$



❖ Problema 4

$$\overline{BD} = 12$$

$$\hat{D}AB = \frac{\pi}{3}$$

$$\hat{A}BD = \frac{\pi}{4}$$

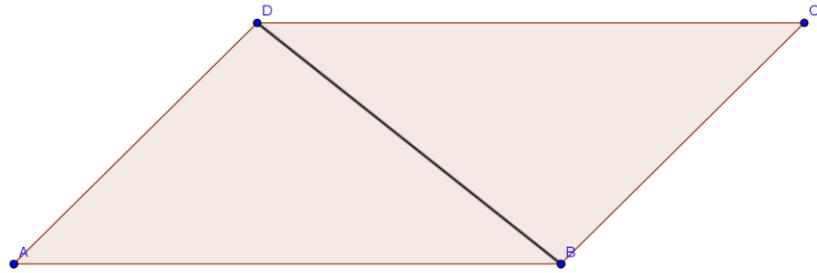
$$\hat{A}DB = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{12 - 4 - 3}{12} \pi = \frac{5}{12} \pi$$

$$\text{sen} \frac{5}{12} \pi = \text{sen} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \text{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \text{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{BD}}{\text{sen} \frac{\pi}{3}} \cdot \text{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{12}{\sqrt{3}/2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{6}$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen} \frac{\pi}{4}} \cdot \text{sen} \frac{5}{12} \pi = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}/2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$$

$$2P(ABC) = 2\overline{AD} + 2\overline{AB} = 8\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 12\sqrt{2} = 12(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$



❖ *Problema 5*

$$\overline{AB} = \overline{AC} + 4$$

$$\hat{BAC} = 120^\circ$$

$$\overline{BC} = 14\text{cm}$$

$$\overline{AC} = x, x > 5$$

❖ $\overline{AB} = x + 4$

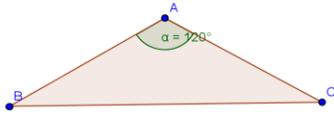
$$(x + 4)^2 + x^2 - 2x(x + 4)\cos 120^\circ = 14^2$$

$$3x^2 + 4x - 60 = 0$$

$$x_1 = -10 \text{ non accettabile}, x_2 = 6 \text{ accettabile}$$

$$\overline{AC} = 6\text{cm}$$

$$\overline{AB} = 10\text{cm}$$



❖ *Problema 6*

$$P = 850 N$$

$$F = 150 N$$

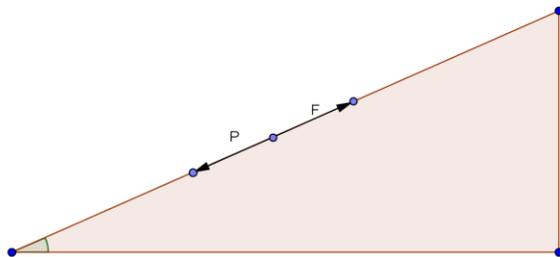
$$P_{\parallel} = P \cdot \text{sen}\alpha = 850 \text{sen}\alpha N$$

$$P_{\parallel} = F$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{F}{P} = \frac{150}{850} = \frac{3}{17}$$

$$\alpha_1 = \arcsen \frac{3}{17} = 10^\circ \text{accettabile}$$

$$\alpha_2 = \arcsen \frac{3}{17} = 170^\circ \text{non accettabile}$$



❖ Problema 7

$$\overline{AC} = 8$$

$$\overline{AB} = 5\sqrt{3}$$

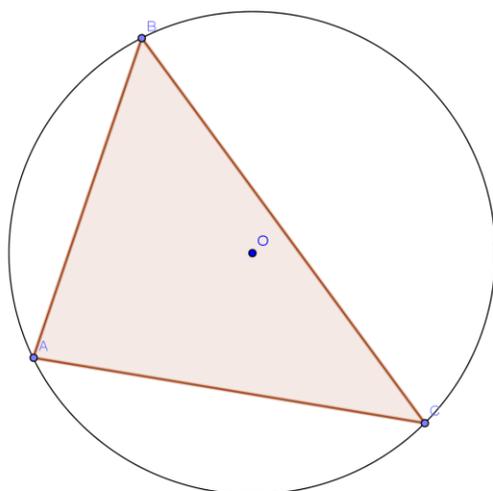
$$r = 5$$

$$\text{sen}\beta = \frac{\overline{AC}}{2r} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen}\gamma = \frac{\overline{AB}}{2r} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos\gamma = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}(\pi - \beta + \gamma) = \text{sen}(\beta + \gamma) = \text{sen}\beta \cos\gamma + \cos\beta \text{sen}\gamma = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10}$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{10} \right) = 2(4\sqrt{3} + 9)$$



❖ Problema 8

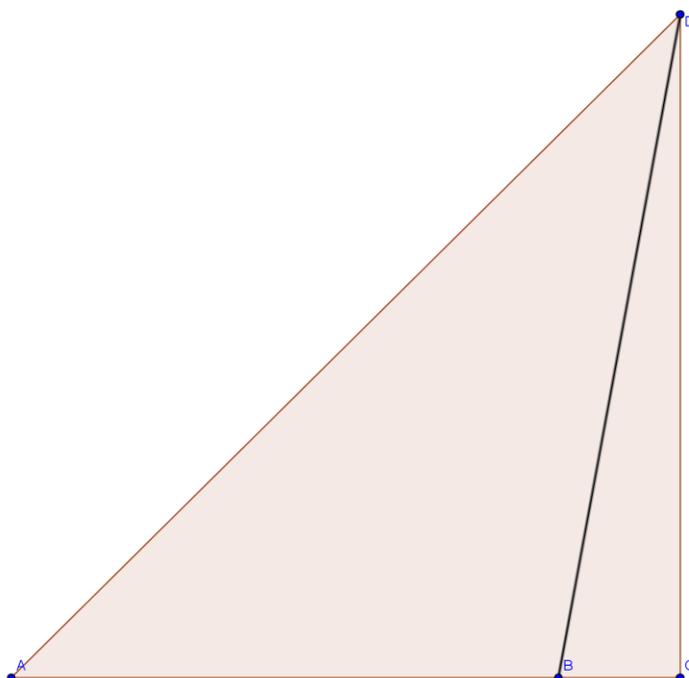
$$\widehat{DAB} = 35^\circ = \alpha$$

$$\widehat{DBC} = 50^\circ = \beta$$

$$\overline{AB} = 1000m$$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\pi - (\alpha + \pi - \beta))} \cdot \text{sen}(\pi - \beta) = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\beta - \alpha)} \cdot \text{sen}\beta$$

$$\overline{CD} = \overline{AD} \cdot \text{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\beta - \alpha)} \cdot \text{sen}\alpha \text{sen}\beta = \frac{1000 \text{sen}35^\circ \text{sen}50^\circ}{\text{sen}15^\circ} m = 1698m \text{ accettabile}$$



6. Criteri di scoring

Il punteggio massimo attribuibile a ciascun problema era specificato in calce alla verifica.

ES.1	ES.2	ES.3	ES.4	ES.5	ES.6	ES.7	ES.8	TOT.
0,5	1	0,8	1	1	1	1	1,7	8

Sempre in calce alla verifica era specificato il punteggio minimo per raggiungere la sufficienza:
punteggio minimo per la sufficienza : 4 punti.

L'attribuzione del punteggio per ciascun esercizio ha tenuto conto:

- della difficoltà dell'esercizio
- del tempo necessario per risolvere l'esercizio

Si è premiato il fatto di aver compreso e saper applicare i concetti fondamentali presentati nell'unità didattica . I problemi presentavano diverse vie di soluzione, per ognuno si è considerato un punteggio maggiore per la risoluzione fatta con il metodo meno dispendioso, cioè utilizzando il minor numero di formule.

7. Griglia di valutazione

Esercizio	Punteggio
Es.1	<u>Da 0 a 0,5 punti</u> <ul style="list-style-type: none">- + 0,3 conoscenza dei teoremi sui triangoli rettangoli- + 0,2 calcolo del perimetro
Es.2	<u>Da 0 a 1 punti</u> <ul style="list-style-type: none">- + 0,4 riconoscere il significato di pendenza- + 0,3 conoscenza dei teoremi sui triangoli rettangoli- + 0,3 funzioni goniometriche inverse
Es.3	<u>Da 0 a 0,8 punti</u> <ul style="list-style-type: none">- + 0,4 I formula fondamentale della goniometria- + 0,4 conoscenza del teorema per il calcolo delle aree
Es.4	<u>Da 0 a 1 punti</u> <ul style="list-style-type: none">- + 0,4 conoscenza del teorema dei seni- + 0,2 calcolo del valore delle funzioni goniometriche per angoli particolari- + 0,4 applicazione delle formule goniometriche
Es.5	<u>Da 0 a 1 punti</u> <ul style="list-style-type: none">- + 0,2 attribuzione dei valori di validità dell'incognita- + 0,4 conoscenza del teorema di Carnet- + 0,2 equazioni di II grado- + 0,2 riconoscimento della validità delle soluzioni
Es.6	<u>Da 0 a 1 punti</u> <ul style="list-style-type: none">- + 0,2 rappresentazione grafica del problema- + 0,4 scomposizione di una forza- + 0,2 significato di equilibrio- +0,2 funzioni goniometriche inverse
Es.7	<u>Da 0 a 1 punti</u> <ul style="list-style-type: none">- + 0,1 rappresentazione grafica del problema- + 0,3 conoscenza del teorema della corda- + 0,3 applicazione delle formule goniometriche

	<ul style="list-style-type: none"> - + 0,3 conoscenza del teorema per il calcolo delle aree
Es.8	<p><u>Da 0 a 1,7 punti</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - 0,5 rappresentazione grafica del problema - 0,6 conoscenza del teorema dei seni - 0,5 conoscenza dei teoremi sui triangoli rettangoli - 0,1 riconoscimento della validità della soluzione

Il voto minimo è 2, il voto massimo è 10. Il punteggio minimo per la sufficienza è 4.

- Fattore di scala della sufficienza:

$$f_{ss} := \frac{\text{punteggio sufficienza}}{6 - \text{voto minimo}} = \frac{4}{4} = 1$$

- Fattore di scala dell'insufficienza:

$$f_{si} := \frac{\text{punteggio totale} - \text{punteggio sufficienza}}{\text{voto massimo} - 6} = \frac{8 - 4}{10 - 6} = 1$$

- Se il punteggio dello studente è \geq del punteggio di sufficienza:

$$\text{voto} = 6 + \frac{\text{punteggio totale alunno} - \text{punteggio sufficienza}}{f_{ss}}$$

- Se il punteggio dello studente è $<$ del punteggio di sufficienza

$$\text{Voto} = 2 + \frac{\text{punteggio totale alunno}}{f_{si}}$$

Per l'attribuzione finale del voto al singolo studente, oltre ai numeri interi da 2 a 10, si sono utilizzati anche i quarti di voto; ad esempio, tra il voto 7 ed il voto 8, sono attribuibili i voti

$$7+ = 7,25$$

$$7 \text{ e mezzo} = 7,5$$

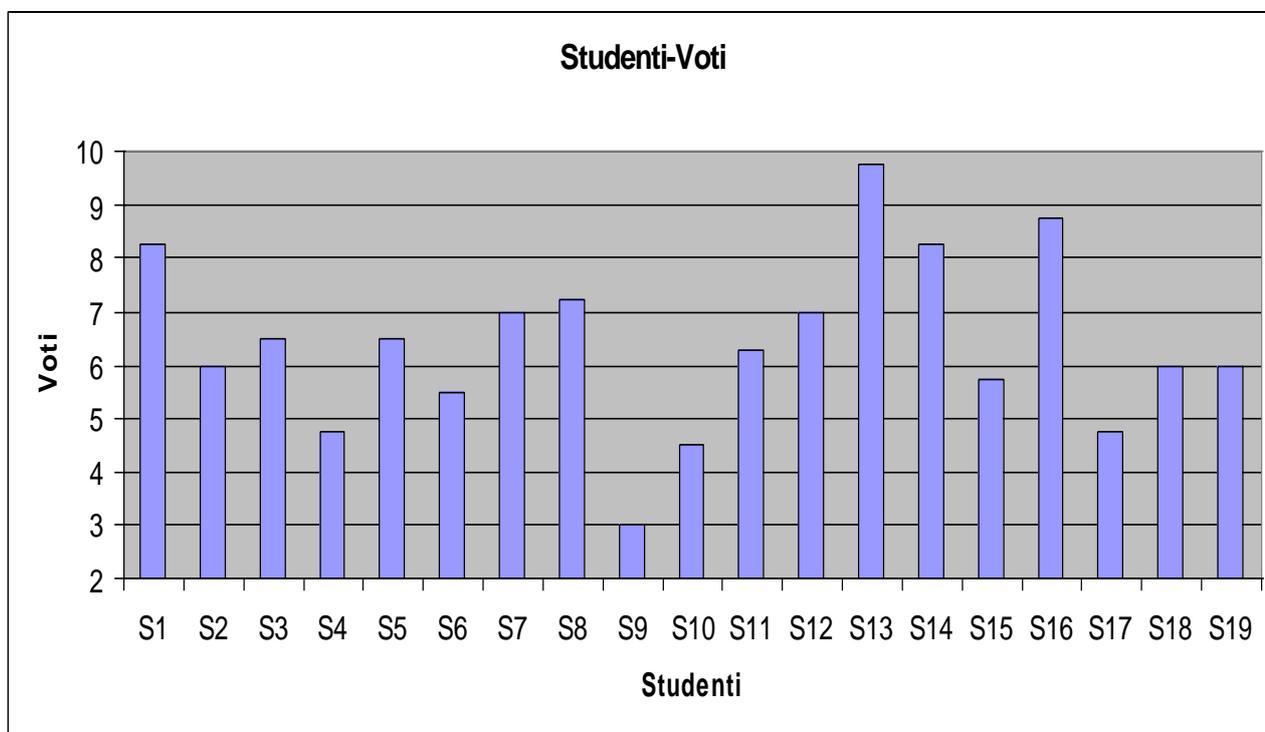
$$8- = 7,75$$

Per consentire l'attribuzione di questi voti utilizzando il precedente criterio, si è resa necessaria un'operazione di approssimazione: si è scelta un'approssimazione al quarto di voto più vicino, cioè a quello per cui è risultata minima la differenza tra il valore ottenuto ed il valore approssimato.

8. Analisi dei dati emersi dalla somministrazione della prova

Nella seguente tabella e nel relativo istogramma vengono riportati i risultati della prova per allievo (riga) e gli esiti di ogni singolo item (colonna), il punteggio ottenuto ed approssimato ed il voto.

Studente	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Totale		Voto
S1	0,5	1	0,8	1	1	1	0,9	0	6,2	8,2	8,25
S2	0,5	0,7	0,8	0,4	0,6	0,6	0,4	0	4	6	6
S3	0,5	0,7	0,8	0,4	0,8	0,6	0,7	0	4,5	6,5	6,5
S4	0,3	0,4	0,8	0,4	0,6	0,2	0,1	0	2,8	4,8	4,75
S5	0,5	0,7	0,8	0,6	0,8	0,6	0,4	0	4,4	6,4	6,5
S6	0,3	0,7	0,8	0,6	0	0,6	0,4	0	3,4	5,4	5,5
S7	0,5	0,7	0,8	0,6	0,8	0,8	0,7	0	4,9	6,9	7
S8	0,5	1	0	0,8	0,8	0,8	0,9	0,5	5,3	7,3	7,25
S9	0	0,4	0	0	0,2	0,2	0,1	0	0,9	2,9	3
S10	0,3	0,4	0,8	0,4	0,2	0,2	0,1	0	2,4	4,4	4,5
S11	0,5	0,7	0,8	0,6	0,6	0,6	0,4	0	4,2	6,2	6,25
S12	0,5	0,7	0,8	1	0,8	0,8	0,4	0	5	7	7
S13	0,5	1	0,8	1	1	0,8	1	1,6	7,7	9,7	9,75
S14	0,5	1	0,8	1	1	0,8	0,7	0,5	6,3	8,3	8,25
S15	0,5	0,7	0,4	0,6	0,6	0,6	0,4	0	3,8	5,8	5,75
S16	0,5	0,7	0,8	1	0,8	0,8	1	1,1	6,7	8,7	8,75
S17	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,6	0,4	0	2,7	4,7	4,75
S18	0,5	0,7	0,4	0,8	0,6	0,6	0,4	0	4	6	6
S19	0,5	1	0,4	0,6	0,8	0,6	0	0	3,9	5,9	6



I risultati rispecchiano il normale andamento della classe con pochi voti alti e poche insufficienze e molti voti intorno al 6.

Media dei voti	6,408
Moda dei voti	6
Mediana dei voti	6,25
Scarto quadratico medio dei voti	1,623

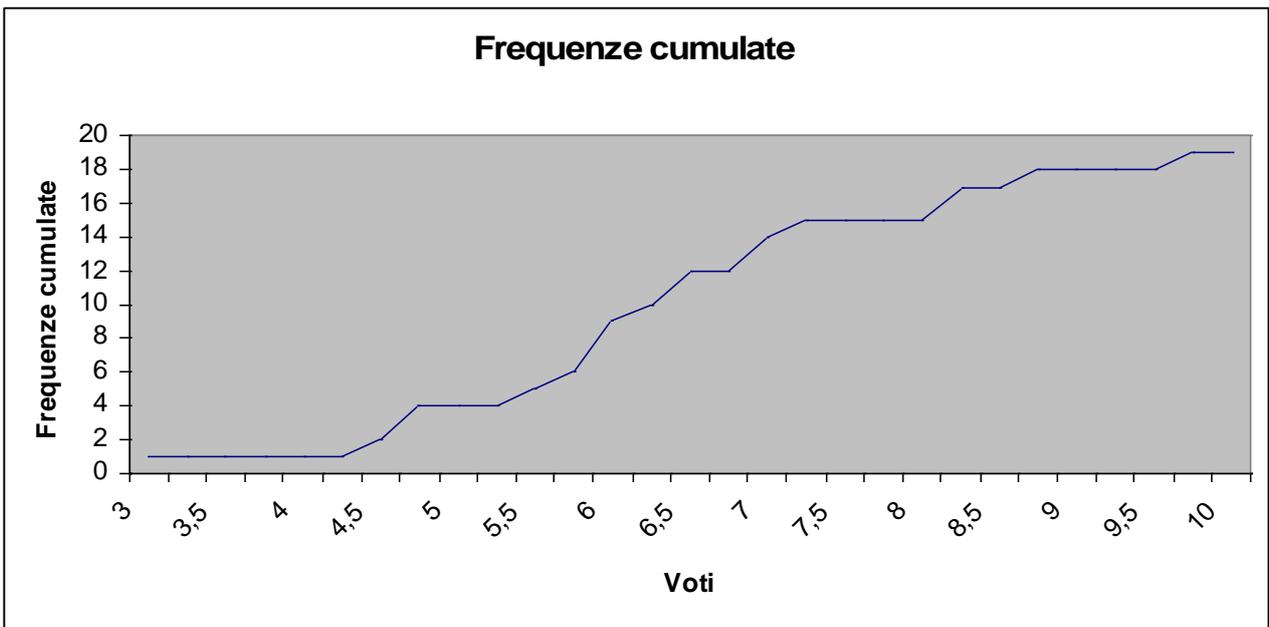
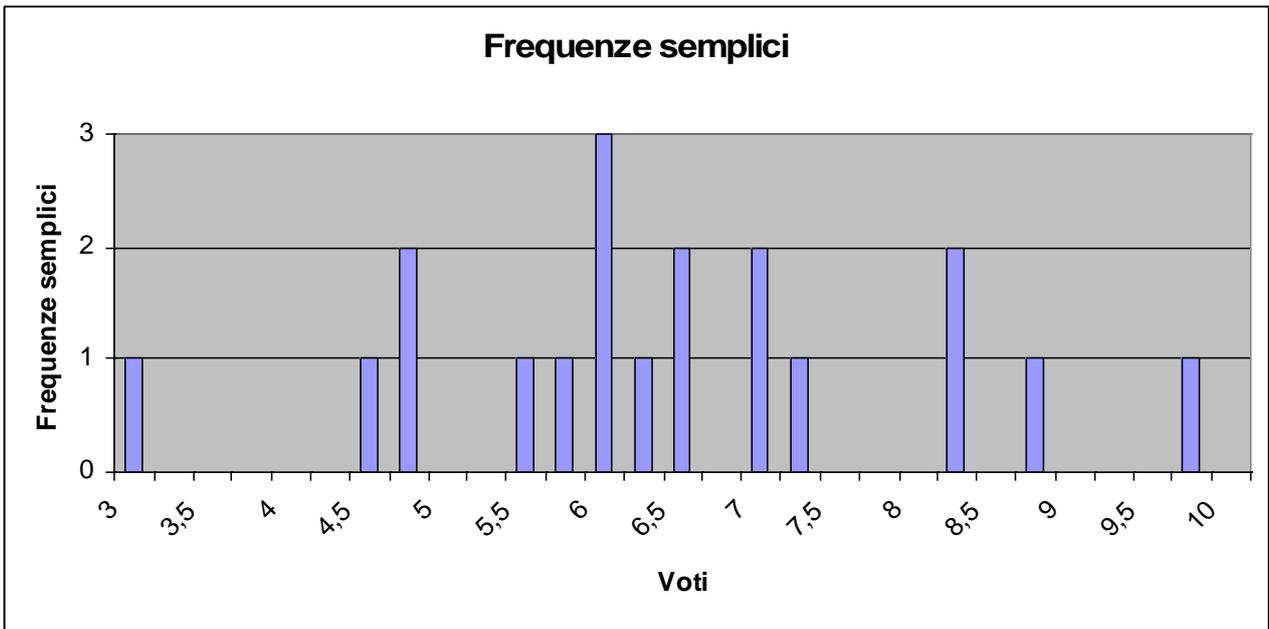
La media dei voti finali è 6,408, quindi in media gli studenti sono sufficienti, con una deviazione standard di 1,623, che ci dà un'idea di quanto si discostino i voti di ogni studente dal valore medio. La moda rappresenta il voto più frequente, quindi abbiamo che il voto finale più frequente è il 6.

9. Distribuzioni di frequenza dei voti finali

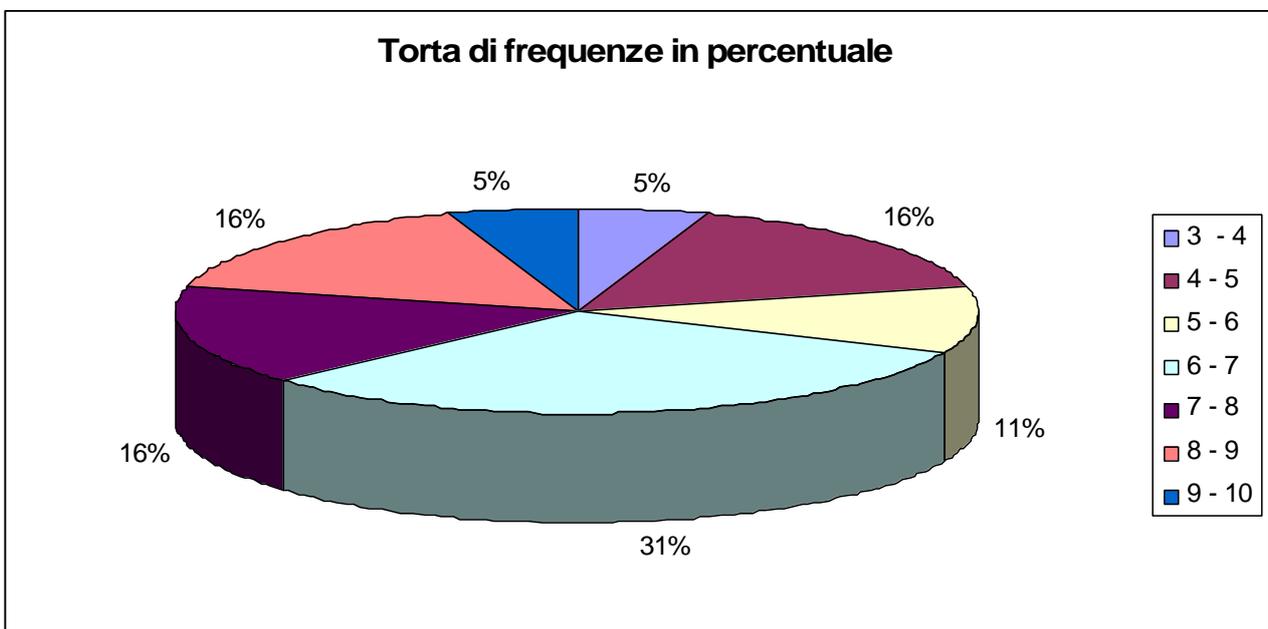
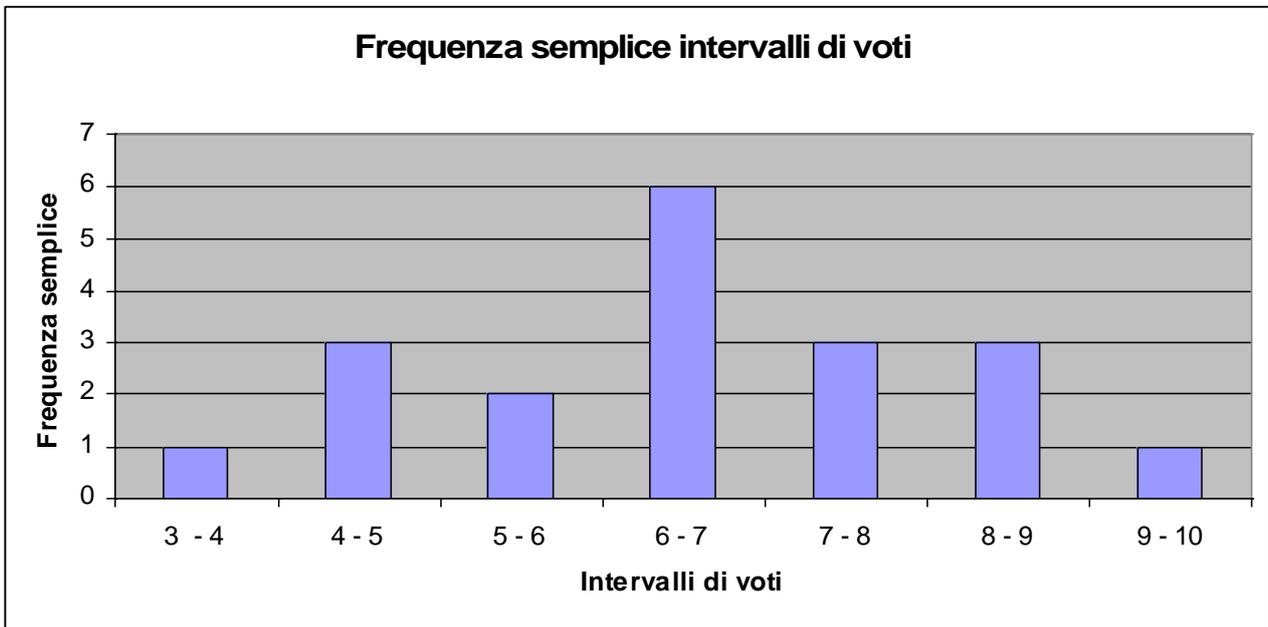
La seguente tabella mostra le frequenze semplici e cumulate per ogni voto attribuibile ed i relativi istogrammi

Voto	Frequenze semplici	Frequenze cumulate
3	1	1
3,25	0	1
3,5	0	1
3,75	0	1
4	0	1
4,25	0	1
4,5	1	2
4,75	2	4
5	0	4
5,25	0	4
5,5	1	5
5,75	1	6
6	3	9
6,25	1	10
6,5	2	12
6,75	0	12
7	2	14
7,25	1	15
7,5	0	15
7,75	0	15
8	0	15

8,25	2	17
8,5	0	17
8,75	1	18
9	0	18
9,25	0	18
9,5	0	18
9,75	1	19
10	0	19



Dall'analisi della precedente tabella e dai relativi istogrammi si può notare che i voti alti ed i voti bassi sono ugualmente frequenti e che c'è un'alta concentrazione di voti intorno al 6. Calcolando le frequenze sugli intervalli di voti si ottengono i seguenti grafici:



10. Analisi degli item

Indici di tendenza relativi agli item

Per ogni item sono stati calcolati punteggio massimo, punteggio minimo e gli indici di tendenza centrale, cioè moda e mediana, e lo scarto quadratico medio.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8
Punteggio minimo	0	0,4	0	0	0,2	0,2	0,1	0
Punteggio massimo	0,5	1	0,8	1	1	0,8	1	1,6
Media	0,432	0,716	0,632	0,642	0,642	0,621	0,495	0,195
Moda	0,5	0,7	0,8	0,6	0,8	0,6	0,4	0
Mediana	0,5	0,7	0,8	0,6	0,8	0,6	0,4	0
Scarto quadratico	0,134	0,212	0,277	0,28	0,295	0,22	0,312	0,444

Si può notare che l'item 8 è risultato il più difficile, con una media molto bassa e moda e mediana pari a zero.

Indice di difficoltà

L'indice di difficoltà dell'item è dato dal rapporto fra il punteggio totale ottenuto da tutti gli studenti sull'item (P_{tot}) ed il punteggio totale massimo ottenibile sull'item (P_{max}) cioè il punteggio ottenuto dalla somma di tutti i punteggi, se tutti gli studenti avessero risposto in modo corretto:

$$ID = \frac{P_{tot}}{P_{max}}$$

L'indice di difficoltà varia tra 0 ed 1:

se $ID = 0$ allora l'item è di difficoltà troppo elevata, poiché nessun allievo è riuscito a dare una risposta corretta;

se $ID = 1$ allora l'item è troppo facile poiché tutti gli allievi hanno risposto correttamente;

se ID è compreso fra 0 e 0,25, l'item era difficile;

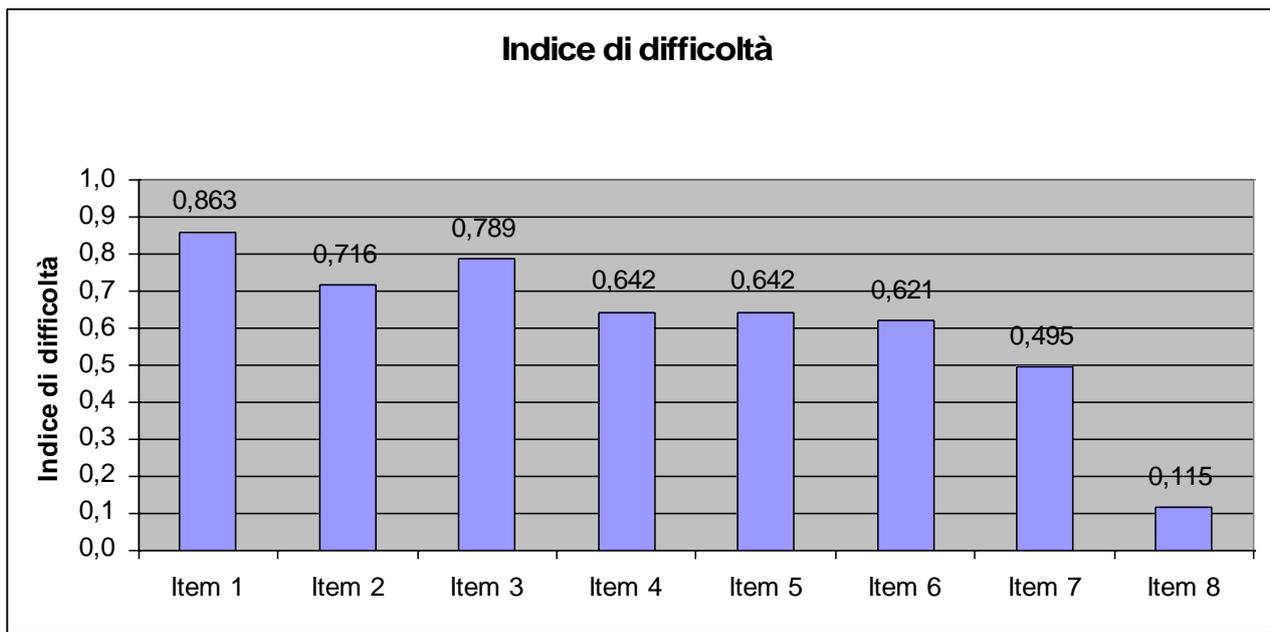
se ID è compreso fra 0,26 e 0,5 l'item era medio-difficile;

se ID è compreso fra 0,51 e 0,75 l'item era medio-facile;

se ID è compreso fra 0,76 e 1 l'item era facile.

Si riporta la tabella e l'istogramma relativi all'indice di difficoltà degli item della prova svolta:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Total e
Indice di difficoltà	0,863	0,716	0,789	0,642	0,642	0,621	0,495	0,115	0,547



Dall'analisi della tabella e del relativo istogramma si può dedurre che gli item 1 e 3 erano i più facili, gli item 2, 4, 5 e 6 erano medio-facili, l'item 7 è risultato medio-difficile e l'item 8 è risultato difficile.

Potere discriminante

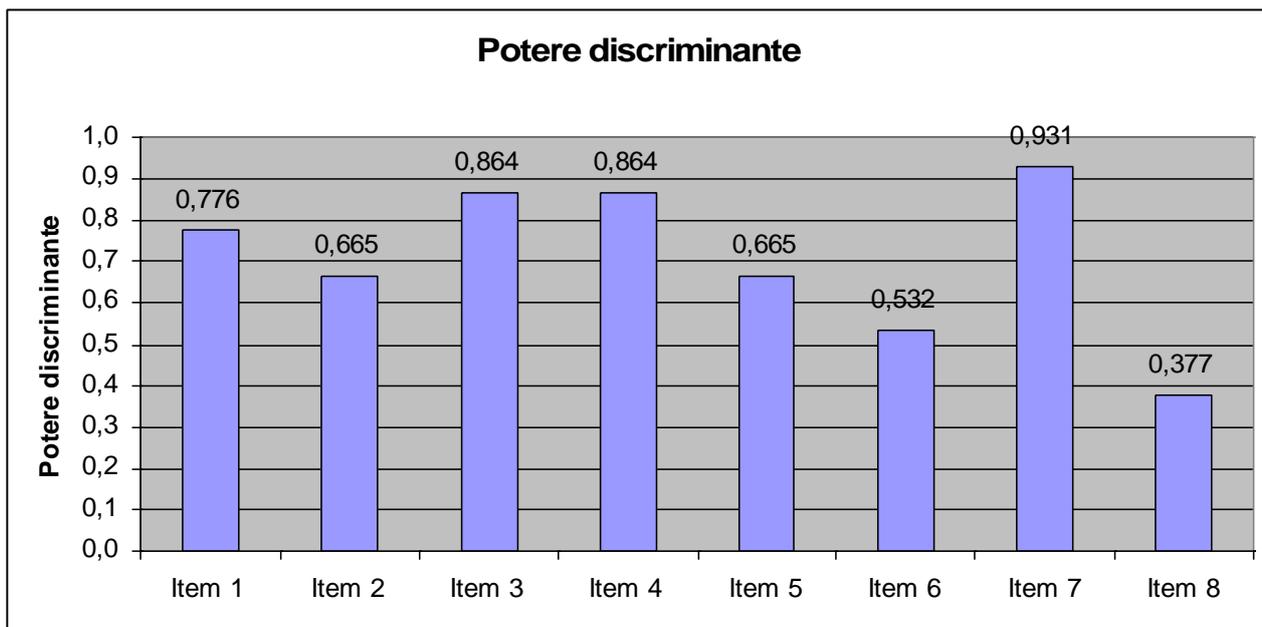
Il potere discriminante dell'item è dato dal prodotto tra il numero di risposte corrette date all'item (E) e il numero di risposte sbagliate (S), rapportato alla metà del numero totale di risposte (N) elevato al quadrato:

$$PD = \frac{ES}{N^2}$$

Può assumere valori compresi fra 0 e 1, vale 0 quando tutti gli studenti hanno risposto in modo corretto o sbagliato (potere discriminante nullo) e vale 1 quando metà degli studenti ha risposto in modo corretto e metà ha risposto in modo sbagliato (potere discriminante massimo).

Nel nostro caso l'item è considerato corretto se lo studente ha ottenuto un punteggio maggiore od uguale alla metà del punteggio massimo dell'esercizio.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8
Corrette	14	15	13	13	15	16	7	2
Errate	5	4	6	6	4	3	12	17
Potere discriminante	0,776	0,665	0,864	0,864	0,665	0,532	0,931	0,377



L'esercizio maggiormente discriminante è stato l'item 7 mentre l'item 8 ha ottenuto il potere discriminante minimo, in effetti l'item 8 era l'item più complesso (per l'interpretazione del testo e per la risoluzione) ed era stato inserito nella verifica per distinguere le eccellenze. L'analisi del potere discriminante dipende fortemente dalla scelta del significato da attribuire al concetto "risposta corretta".

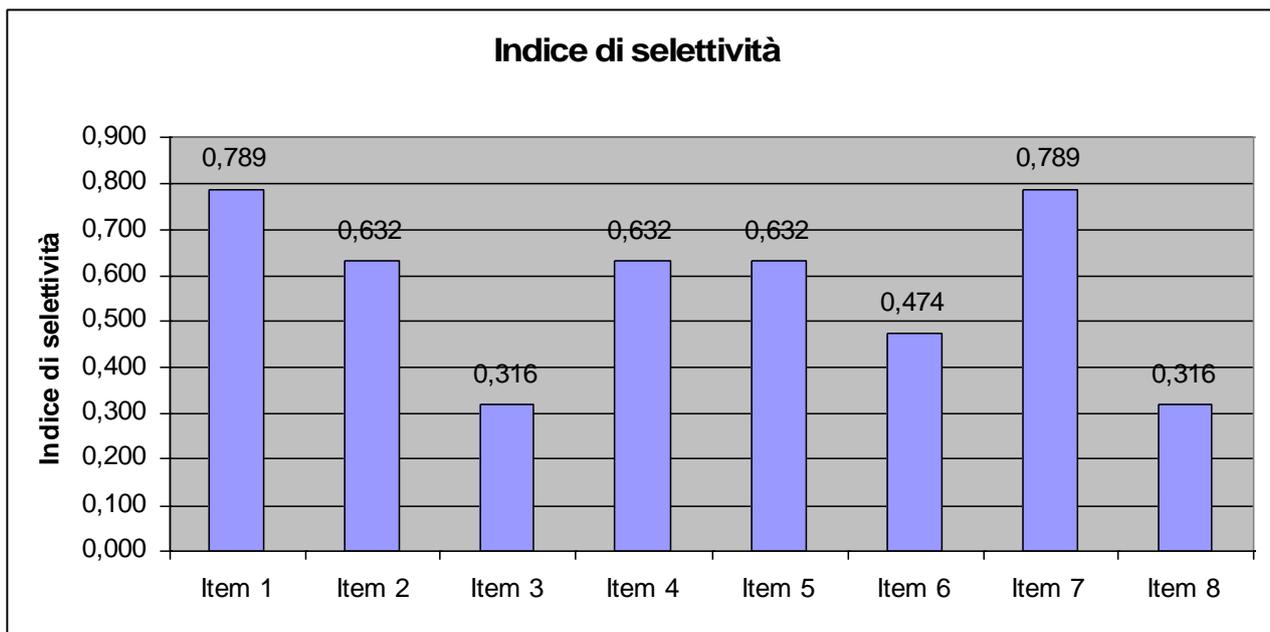
Indice di selettività

L'indice di selettività è dato dalla seguente formula:

$$IS = \frac{NmNp}{N^3}$$

dove N_m indica il numero di risposte esatte date all'item da parte degli allievi con i risultati migliori su tutta la verifica (se ne prende un terzo, corrispondente al terzo che ha ottenuto il punteggio più alto, in questo caso si sono considerati 6 studenti con i risultati migliori), N_p indica il numero di risposte esatte date da parte degli allievi che hanno ottenuto i risultati peggiori (si prende il terzo degli studenti con i voti finali più bassi, in questo si sono considerati 6 studenti con il punteggio più basso), N indica il numero totale di studenti.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8
N_m	6	6	5	6	6	6	5	2
N_p	1	2	3	2	2	3	0	0
Indice di selettività	0,789	0,632	0,316	0,632	0,632	0,474	0,789	0,316



L'indice di selettività varia fra -1 e $+1$:

se $IS = -1$, gli alunni che hanno ottenuto il miglior punteggio nella verifica hanno risposto tutti in modo errato all'item e gli alunni che hanno ottenuto il peggior punteggio hanno risposto tutti in modo corretto all'item, si parla in questo caso di *selettività rovesciata*, l'item discrimina al contrario di come dovrebbe fare;

se $IS = 0$, l'item non discrimina fra allievi più preparati e meno preparati, cioè sia gli allievi più bravi che quelli meno bravi hanno risposto correttamente all'item;

se $IS = +1$, gli alunni che hanno ottenuto il miglior punteggio nella verifica hanno risposto tutti in modo corretto all'item e gli alunni con il peggior punteggio hanno risposto tutti in modo errato all'item, si parla in questo caso di *massima selettività*.

Gli item con maggiore selettività sono gli item 1 e 7.

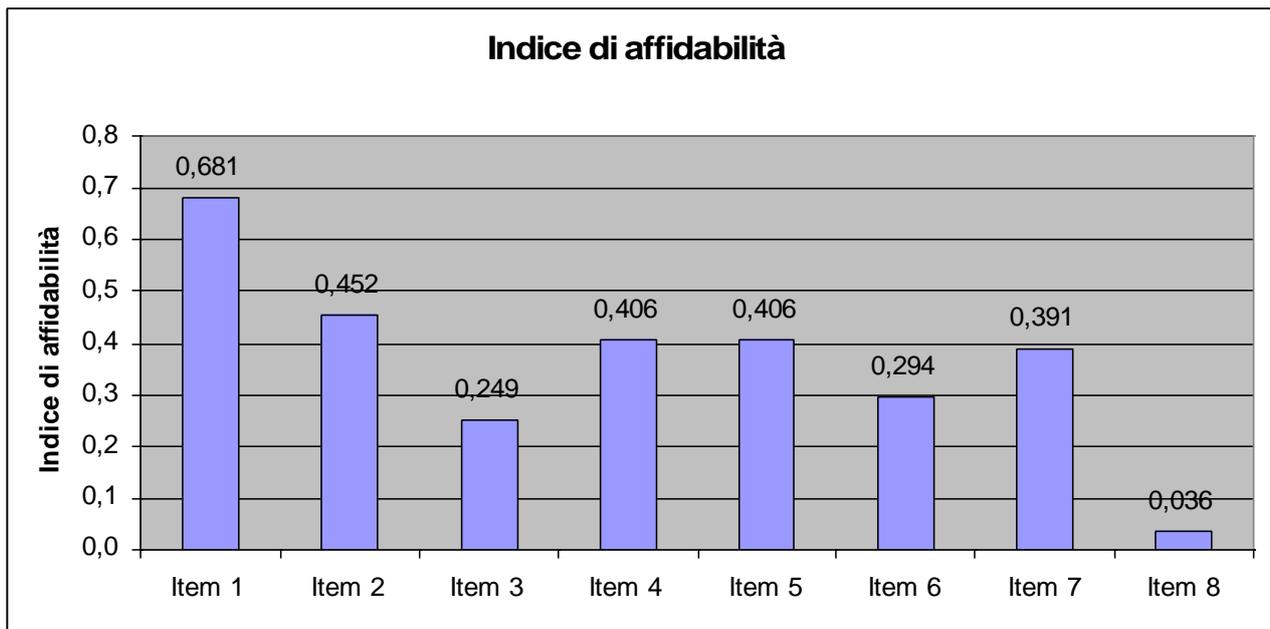
L'analisi dell'indice di selettività dipende fortemente dalla scelta del significato da attribuire al concetto "risposta corretta".

Indice di affidabilità

L'indice di affidabilità si ottiene come prodotto fra l'indice di difficoltà e l'indice di selettività:

$$IA = ID \times IS.$$

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8
Indice di difficoltà	0,863	0,716	0,789	0,642	0,642	0,621	0,495	0,115
Indice di selettività	0,789	0,632	0,316	0,632	0,632	0,474	0,789	0,316
Indice di affidabilità	0,681	0,452	0,249	0,406	0,406	0,294	0,391	0,036



Più l'indice di affidabilità è alto e positivo, più l'item è da considerarsi affidabile, il che vuol dire che discrimina nel modo giusto fra alunni più preparati e meno preparati. Dai dati si deduce che l'item 1 è il più affidabile mentre l'item 8 è il meno affidabile (come già detto in precedenza è l'esercizio inserito nella prova per premiare le eccellenze).

L'analisi dell'indice di affidabilità dipende fortemente dalla scelta del significato da attribuire al concetto "risposta corretta".

11. Indicazioni per il recupero

Il compito è stato consegnato la lezione successiva a quella dello svolgimento con un breve commento individuale. La parte restante della lezione è stata dedicata alla correzione della verifica, correzione effettuata a coppie (alunno "bravo", alunno "debole"). Successivamente si è dedicata parte di una lezione per discutere e risolvere insieme l'esercizio più complesso (il problema 8).

12. Auto-riflessione sull'esperienza

Questa prova di verifica ha evidenziato le difficoltà incontrate spesso dagli studenti:

1. applicazione dei contenuti teorici;
2. errori di calcolo, talvolta non gravi ma ripetuti;
3. difficoltà nell'affrontare situazioni problematiche nuove.

La maggior parte della classe ha dimostrato di conoscere e saper applicare i teoremi sui triangoli rettangoli, dimostrando di aver studiato le "regole" di base della trigonometria. Nella classe manca la capacità di affrontare problemi nuovi.

La prova risulta ben costruita per questa tipologia di classe: la preparazione di una verifica con esercizi meno "scolastici" avrebbe comportato un maggior numero di insuccessi. Anche l'esercizio più complesso ha svolto la sua funzione: ha permesso di premiare le poche eccellenze presenti nella classe senza influire negativamente sui risultati degli altri alunni.

