

Scuola Interateneo di Specializzazione
per la formazione degli insegnanti della scuola secondaria
SIS Piemonte - IX ciclo

CORSO DI PEDAGOGIA SPERIMENTALE

**ANALISI DI UNA PROVA DI VALUTAZIONE
IN MATEMATICA**

Giacomo Mario Bergesio
Silvia Costantino
Maria Teresa Ravera
Cristina Ribero

Anno Accademico 2008/2009

INDICE

1. OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO	3
2. INDICATORI DI AVVENUTO RAGGIUNGIMENTO	7
3. DESTINATARI DEL PERCORSO DI APPRENDIMENTO	15
4. TIPOLOGIA E STRUTTURA DELLA PROVA	17
5. ACCORGIMENTI PER LA SOMMINISTRAZIONE DELLA PROVA	22
6. CRITERI DI VALUTAZIONE E REGOLE DI ASSEGNAZIONE DEI PUNTEGGI	26
7. RESOCONTO DELLA SOMMINISTRAZIONE E ANALISI DEI RISULTATI	29
8. ANALISI DEGLI ITEM	31
9. INDICAZIONI PER IL RECUPERO DEGLI ALLIEVI E PER LA PROGRAMMAZIONE SUCCESSIVA	45
10. CONCLUSIONE E RIFLESSIONE FINALE	51
11. ALLEGATI	53

1. OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Obiettivi di apprendimento (ed eventuali sotto-obiettivi), di cui la prova intende rilevare il raggiungimento, classificati secondo la tassonomia di Anderson & Krathwohl.

Qui di seguito sono elencati gli obiettivi di apprendimento di cui la prova intende verificare il raggiungimento, e per ciascuno di essi è specificato il processo della tassonomia di Anderson e Krathwohl coinvolto.

- Saper risolvere algebricamente una disequazione di secondo grado completa (APPLICARE, eseguire):
 - Conoscere il metodo risolutivo delle disequazioni di secondo grado (ricondersi all'equazione associata) (RICORDARE, rievocare) e saperlo applicare per la risoluzione di una disequazione di secondo grado intera (APPLICARE, eseguire);
 - Conoscere il metodo risolutivo di una equazione di secondo grado (RICORDARE, rievocare) e saperlo applicare per la risoluzione dell'equazione associata alla disequazione di partenza (APPLICARE, eseguire);
 - Conoscere le soluzioni delle disequazioni di secondo grado complete $ax^2+bx+c><0$ note le soluzioni dell'equazione associata (valori interni ed esterni) (RICORDARE, rievocare) ed applicarle per ottenere la soluzione particolare della disequazione iniziale a partire dalle soluzioni dell'equazione ad essa associata (APPLICARE, eseguire);
 - Esprimere la soluzione anche in termini di intervallo/i (APPLICARE; eseguire);
 - Verificare che l'uso delle [e (dell'intervallo soluzione sia compatibile col segno della disequazione iniziale (VALUTARE, controllare);
- Saper risolvere graficamente una disequazione di secondo grado completa (APPLICARE, eseguire):
 - Data la disequazione di secondo grado ricondersi all'equazione associata e riconoscere che si tratta di una parabola (RICORDARE, rievocare);
 - Saper rappresentare graficamente nel piano una parabola di data equazione (APPLICARE, eseguire);
 - Saper leggere il grafico (COMPRENDERE, interpretare) ed individuare/segnare sull'asse delle ascisse (x) la soluzione della disequazione (APPLICARE, eseguire);
 - Conoscere il significato di pallino pieno (valore compreso) e pallino vuoto (valore escluso) (RICORDARE; rievocare) e non commettere banali errori nella rappresentazione grafica della soluzione (APPLICARE, eseguire);
 - Verificare la coerenza interna del "sistema", ovvero che a pallini vuoti \circ corrispondano disuguaglianze strette ($< o >$) e a pallini pieni \bullet corrispondano disuguaglianze larghe ($\leq o \geq$) (VALUTARE, controllare);
- Saper stabilire se una data disequazione di secondo grado ammette soluzione oppure no (APPLICARE, eseguire):
 - Conoscere il concetto di discriminante Δ (RICORDARE, rievocare) e saper calcolare quello associato ad un dato trinomio di secondo grado (APPLICARE, eseguire);

- Conoscere le regole di segno del trinomio di secondo grado a seconda del valore assunto da Δ (RICORDARE, rievocare) e determinare se esiste soluzione oppure no (APPLICARE, eseguire);
- Stabilire se il risultato trovato è in accordo con l'affermazione di cui si vuole stabilire la veridicità/ falsità (COMPRENDERE, confrontare);
- Saper stabilire se una disequazione di secondo grado del tipo $ax^2+c><0$ ammette soluzione oppure no (APPLICARE, eseguire) avendo a mente la regola secondo cui tutti i numeri reali x hanno quadrato positivo ($x^2 \geq 0$) (RICORDARE, rievocare);
- Saper stabilire se una disequazione di secondo grado del tipo $ax^2+bx+c><0$ di cui è noto il segno di Δ ammette soluzione oppure no (APPLICARE, eseguire), avendo in mente le regole per il segno del trinomio di secondo grado (RICORDARE, rievocare);
- Saper dire se un dato valore è soluzione di una data disequazione parametrica di secondo grado (non completa di parametri a,b,c) (APPLICARE, eseguire):
 - Sostituire il valore all'interno della disequazione e vedere se è soddisfatta oppure no (APPLICARE; eseguire);
 - Cercare eventuali casi particolari/contro esempi (CREARE, generare), prima di affermare che una certa proposizione è sempre vera o sempre falsa (VALUTARE; controllare);
- Saper risolvere una disequazione di secondo grado incompleta (cui manca il termine di primo grado) (APPLICARE, eseguire):
 - Ricordare le regole del segno del trinomio di secondo grado in questo caso particolare (RICORDARE; rievocare) e procedere quindi al calcolo di Δ (APPLICARE, eseguire);oppure
 - Conoscere le regole per il cambiamento di segno di una disequazione (RICORDARE, rievocare), per cui cambiare segno al primo membro e verso alla disequazione (APPLICARE, eseguire), infine conoscere la positività del quadrato di un qualunque numero reale (RICORDARE, rievocare) e trarre le necessarie conclusioni (COMPRENDERE, riassumere);
- Conoscere la definizione di parabola (RICORDARE, rievocare);
- Individuare le caratteristiche principali di una parabola di equazione $y=ax^2$ (RICORDARE, rievocare):
 - Conoscere la formula generale per l'asse di una parabola (RICORDARE, rievocare) [e determinarne l'equazione per una parabola data (APPLICARE, eseguire)];
 - Conoscere la formula generale per il vertice di una parabola (RICORDARE, rievocare) [e determinarne le coordinate per una parabola data (APPLICARE, eseguire)];
 - Conoscere la formula generale per il fuoco di una parabola (RICORDARE, rievocare) [e determinarne le coordinate per una parabola data (APPLICARE, eseguire)];

- Conoscere la formula generale per la direttrice di una parabola (RICORDARE, rievocare) [e determinarne l'equazione per una parabola data (APPLICARE, eseguire)];
- Conoscere il concetto di concavità e a quale parametro è legato (RICORDARE, rievocare);
- Dato un insieme I espresso in forma algebrica (o di intervallo), determinare una possibile disequazione di secondo grado (anche non completa) che lo ammetta come insieme delle soluzioni aggiungendo un segno opportuno all'espressione da completare (CREARE, generare):
 - Se $I = \mathbb{R}$ (cioè è soluzione $\forall x \in \mathbb{R}$) ricordare che tutti i reali hanno quadrato positivo, ovvero $x^2 \geq 0$ (RICORDARE, rievocare) e sfruttare questo fatto per la creazione della disequazione (CREARE, generare);
 - Se $I = \emptyset$ (cioè la disequazione è impossibile) provare a sostituire il valore $x=0$ e inserire il segno opportuno nell'espressione in modo tale da renderla falsa anche in questo caso particolare (CREARE, generare);
 - Se I è un dato intervallo, applicare le regole viste per la risoluzione di disequazioni di secondo grado "al contrario" (cambiare il punto di vista, l'ottica): gli estremi dell'intervallo sono soluzioni dell'equazione associata, determinarla, poi inserire un segno opportuno ($>$, $<$, \geq , \leq) per ottenere la disequazione particolare a seconda che i valori soluzione siano interni (disequazione col $<$) o esterni (disequazione col $>$) (CREARE, generare);
- Data la soluzione grafica di una disequazione di secondo grado, stabilire di quale disequazione (tra quelle fornite) è soluzione (ANALIZZARE, organizzare):
 - Leggere il grafico, in particolare individuare se si tratta di una disequazione del tipo $<$ (valori interni) o $>$ (valori esterni) (COMPRENDERE, interpretare) ed escludere le (prime) opzioni sbagliate (VALUTARE, controllare);
 - Leggere il grafico, in particolare osservare se la concavità è verso l'alto o verso il basso (COMPRENDERE, interpretare), ricordare a quale parametro è legata la concavità (RICORDARE, rievocare) ed escludere altre opzioni sbagliate (VALUTARE, controllare);
 - Verificare che le informazioni trovate siano sufficienti per determinare la risposta (è rimasta una sola opzione? Allora sarà quella esatta!) (VALUTARE, controllare);
 - Qualora le opzioni rimaste siano più di una, cercare nuove informazioni, ad esempio le intersezioni con gli assi (RICORDARE, rievocare) e determinarle (APPLICARE, eseguire), infine confrontarle con il grafico (COMPRENDERE, interpretare) ed escludere le ultime opzioni errate (VALUTARE, controllare);
 - Giustificare la scelta fatta facendo un discorso lineare e coerente sfruttando le informazioni ricavate ai punti precedenti (ANALIZZARE, organizzare e/o COMPRENDERE, spiegare);
- Descrivere una parabola di data equazione, indicandone le caratteristiche salienti senza rappresentarla graficamente (ANALIZZARE, organizzare):
 - Conoscere il concetto di concavità e a quale parametro è legato (RICORDARE, rievocare) ed applicarlo al caso specifico (APPLICARE, eseguire);

- Conoscere il metodo di determinazione della/e intersezione/i con gli assi coordinati (RICORDARE, rievocare) e determinare le coordinate di tali punti (APPLICARE, eseguire);
- Conoscere il significato dei termini di ascissa e ordinata (RICORDARE, rievocare);
- Saper passare da una richiesta espressa "a parole", per esteso, alla corrispondente condizione matematica (COMPRENDERE, interpretare) e risolvere la conseguente disequazione di secondo grado (APPLICARE, eseguire);
- Osservare che le richieste "ordinata positiva" ed "ordinata negativa" sono complementari, per cui è sufficiente risolvere una sola disequazione (COMPRENDERE, inferire).

2. INDICATORI DI AVVENUTO RAGGIUNGIMENTO

Per ciascun obiettivo di apprendimento, esplicitazione degli indicatori di avvenuto raggiungimento (descrittori dell'apprendimento) e degli item corrispondenti sulla prova di valutazione, su una tabella a quattro colonne.

Ecco la tabella adattata alla prova di verifica in esame (sono indicati nella prima colonna solo gli obiettivi di apprendimento e non i corrispondenti sotto-obiettivi, descritti in dettaglio al punto 1):

Obiettivi di apprendimento	Classificazione di Anderson & Krathwohl	Indicatori/ Descrittori	Item della prova
Saper risolvere algebricamente una disequazione di secondo grado completa	APPLICARE, eseguire	<p>Sa risolvere una disequazione di secondo grado completa della forma $ax^2+bx+c><0$, esplicitando i passaggi che compie ed il risultato in notazione algebrica:</p> <ul style="list-style-type: none"> -sa ricondursi all'equazione di secondo grado associata; -sa risolvere l'equazione di secondo grado associata; -sa sfruttare le soluzioni dell'equazione associata per determinare la soluzione algebrica; <p>Sa esprimere il risultato sotto forma di intervallo dimostrando di avere ben chiaro il significato delle parentesi [e (.</p>	<p>Data la disequazione</p> $4x^2 - 12x + 9 > 0$ <p>a)risolvila algebricamente esplicitando i vari passaggi e scrivi la soluzione sotto forma di intervallo</p> <p>(ITEM 1a)</p>

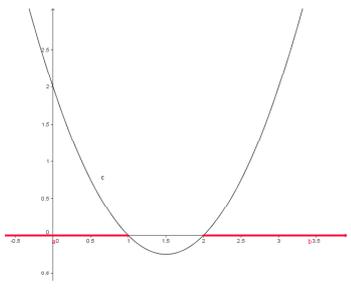
<p>Saper risolvere graficamente una disequazione di secondo grado completa</p>	<p>APPLICARE, eseguire</p>	<p>Si risolvere graficamente una disequazione di secondo grado completa della forma $ax^2+bx+c > < 0$, segnando la soluzione sull'asse x, in particolare:</p> <ul style="list-style-type: none"> -sa individuare la parabola associata; -sa rappresentare una parabola di data equazione con vertice, asse ed intersezione con gli assi; -sa individuare l'intervallo dell'asse x in cui la disequazione è soddisfatta; -sa usare con sicurezza il \bullet o il \circ a seconda che l'estremo dell'intervallo sia compreso o escluso, cioè a seconda se la disuguaglianza sia del tipo \geq (\leq) oppure $>$ ($<$). 	<p>Data la disequazione $4x^2 - 12x + 9 > 0$ b) risolvila poi graficamente. (ITEM 1b)</p>
--	----------------------------	---	---

<p>Saper stabilire se una data disequazione di secondo grado ammette soluzione oppure no</p>	<p>APPLICARE, eseguire</p>	<p>Si stabilire se una data disequazione di secondo grado ammette soluzione oppure no riconducendosi al calcolo del discriminante Δ senza però aver bisogno di esplicitare i passaggi svolti (dal momento che si tratta di un V/F):</p> <ul style="list-style-type: none"> -sa calcolare Δ di un trinomio di secondo grado dato (distingue a,b,c); -sa applicare al caso particolare le regole sul segno del trinomio di secondo grado; -cerca eventuali contro esempi prima di stabilire la veridicità/ falsità dell'affermazione. 	<p>Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F):</p> <p>a) La disequazione $x^2 + x + 1 > 0$ non ammette soluzione (ITEM 2a)</p> <p>f) La disequazione $x^2 + 4x + 2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ (ITEM 2f)</p> <p>g) La disequazione $x^2 - x + 3 \leq 0$ non ammette soluzione (ITEM 2g)</p> <p>h) La disequazione $3x^2 - x + 1 > 0$ è verificata $\forall x \neq 1$ (ITEM 2h)</p> <p>i) La disequazione $x^2 + 10 < 0$ non ammette soluzione (ITEM 2i)</p>
<p>Saper stabilire se una disequazione di secondo grado del tipo $ax^2+c>0$ ammette soluzione oppure no</p>	<p>APPLICARE, eseguire</p>	<p>Stabilire se una disequazione di secondo grado incompleta (priva del termine di primo grado) ammette soluzione oppure no:</p> <ul style="list-style-type: none"> -ricorda la regola del segno del quadrato di un numero reale; -la applica al caso particolare; 	<p>Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F):</p> <p>i) La disequazione $x^2 + 10 < 0$ non ammette soluzione (ITEM 2i)</p>

<p>Saper stabilire se una disequazione di secondo grado del tipo $ax^2+bx+c><0$ di cui è noto il segno di Δ ammette soluzione oppure no</p>	<p>RICORDARE, rievocare</p>	<p>Sa stabilire se una disequazione di secondo grado della forma $ax^2+bx+c><0$ ammette soluzione o no semplicemente richiamando alla mente le regole sul segno del trinomio di secondo grado di cui si conosce il segno del discriminante Δ.</p>	<p>Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F): b) Se $\Delta > 0$ la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ ha sempre infinite soluzioni (ITEM 2b)</p>
<p>Saper dire se un certo valore è soluzione di una data disequazione parametrica di secondo grado incompleta (cui manca o il termine di primo grado o quello noto) (di parametri a,b,c)</p>	<p>APPLICARE, eseguire</p>	<p>Sa stabilire se un dato valore x è soluzione di una disequazione di secondo grado non completa scritta nella forma generale $ax^2+bx<0$ (o $ax^2+c>0$) senza esplicitare i passaggi: -sostituisce x all'interno della disequazione e osserva se verifica; -cerca eventuali contro esempi (attribuendo valori numerici ai parametri a,b,c) prima di affermare che è sempre vera o sempre falsa.</p>	<p>Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F): c) Se $\Delta > 0$ la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ ha sempre infinite soluzioni (ITEM 2b) d) Il numero zero appartiene sempre all'insieme soluzione della disequazione $ax^2 + c > 0$ (ITEM 2d)</p>

<p>Saper risolvere una disequazione di secondo grado incompleta (cui manca il termine di primo grado)</p>	<p>APPLICARE, eseguire</p>	<p>Sa determinare la soluzione di una disequazione di secondo grado in cui manca il termine lineare ma senza esplicitare i passaggi:</p> <ul style="list-style-type: none"> -calcola il discriminante in questo caso particolare e applica le regole del segno del trinomio di grado 2; -applica le regole del cambiamento di segno di una disequazione e ricorda che il quadrato di un numero reale qualsiasi è sempre positivo; -sa trarre le dovute conclusioni. 	<p>Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F):</p> <p>e) La disequazione $-x^2 - 1 \geq 0$ non ammette soluzione</p> <p style="text-align: center;">(ITEM 2e)</p>
<p>Conoscere la definizione di parabola</p>	<p>RICORDARE, rievocare</p>	<p>Sa riprodurre la definizione di parabola come luogo dei punti del piano che soddisfano a delle date proprietà.</p>	<p>Completa le seguenti frasi:</p> <p>a)La parabola è il dei punti del piano da un punto fisso detto e da una retta fissa detta</p> <p style="text-align: center;">(ITEM 3a)</p>
<p>Individuare le caratteristiche principali di una parabola di equazione $y=ax^2$</p>	<p>RICORDARE, rievocare</p>	<p>Ricorda le formule di geometria analitica relative ad asse, vertice, fuoco e direttrice della parabola $y=ax^2$.</p>	<p>Completa le seguenti frasi:</p> <p>b) L'equazione $y = ax^2$ rappresenta una parabola avente come l'asse y, come vertice il punto $V= (.....;)$, come fuoco il punto $F(.....;.....)$ e come direttrice la retta $y =$</p> <p style="text-align: center;">(ITEM 3b)</p>

<p>Conoscere il concetto di concavità e a quale parametro è legato</p>	<p>RICORDARE, rievocare</p>	<p>Conosce la differenza tra concavità verso l'alto e verso il basso a seconda del valore assunto dal parametro a (rispettivamente $a > 0$ ed $a < 0$)</p>	<p>Completa le seguenti frasi: c) Data la parabola $y = ax^2 + bx + c$, se $a > 0$ la parabola ha concavità verso (ITEM 3c) Descrivi, senza disegnarla, la parabola individuata dall'equazione $y = x^2 + 6x + 5$, precisando: a) se è concava verso l'alto o verso il basso; (ITEM 6a)</p>
<p>Dato un insieme I espresso in forma algebrica (o di intervallo), determinare una possibile disequazione di secondo grado (anche non completa) che lo ammette come insieme delle soluzioni</p>	<p>CREARE, generare</p>	<p>Sa determinare una disequazione particolare che ammette come soluzione un dato insieme I soluzione: -sa ricondursi a dei casi particolari di disequazioni di secondo grado note ed incomplete; -sa inserire il segno o il coefficiente opportuno negli appositi spazi -sa applicare le regole risolutive per le disequazioni di secondo grado "al contrario", dalla soluzione all'equazione e non più viceversa.</p>	<p>Completa in modo opportuno le seguenti disuguaglianze: a) $\forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione di $x^2 \dots\dots\dots 25 > 0$ b) impossibile è soluzione di $x^2 \dots\dots\dots 7 < 0$ c) $2 < x < 5$ è soluzione di $x^2 - \dots x + \dots < 0$ d) $\forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione di $2x^2 - x + 1 \dots\dots\dots 0$ e) $x \leq 4 \vee x \geq 6$ è soluzione di $x^2 - \dots x \dots\dots \geq 0$ (ITEM 4a, 4b, 4c, 4d, 4e)</p>
<p>Data la soluzione grafica di una disequazione di secondo grado, stabilire</p>	<p>ANALIZZARE, organizzare</p>	<p>Sa ricostruire la disequazione iniziale a partire dalla soluzione grafica:</p>	<p>La seguente figura illustra la risoluzione grafica di una disequazione di 2° grado. A quale delle seguenti disequazioni si riferisce? Giustifica la tua risposta.</p>

<p>di quale disequazione (tra quelle fornite) è soluzione e giustificare la risposta</p>		<p>-legge il grafico con sicurezza determinando innanzitutto se si tratta di una $f(x)>0$ o di una $f(x)<0$, poi determinando il segno del parametro a secondo la concavità e cercando eventualmente le intersezioni con gli assi.</p> <p>Si ri-organizzare le conoscenze teoriche in modo coerente nel giustificare la scelta operata.</p>	<p>risposta.</p> <p>$x^2-3x+2<0$</p> <p>$-x^2-3x+2<0$</p> <p>$-x^2-3x+2>0$</p> <p>$x^2-3x+2>0$</p>  <p>(ITEM 5)</p>
--	--	--	--

<p>Descrivere una parabola di data equazione, indicandone le caratteristiche salienti, senza rappresentarla graficamente</p>	<p>ANALIZZARE, organizzare</p>	<p>Sa determinare le caratteristiche principali di una parabola di data equazione:</p> <ul style="list-style-type: none"> -sa stabilirne la concavità; -sa calcolare le intersezioni con gli assi; - sa tradurre una condizione espressa a parole nella corrispondente relazione matematica (disequazione di secondo grado); - sa dire in corrispondenza a quali valori di x assume valori positivi e negativi risolvendo opportune disequazioni (o una sola, osservando che la soluzione dell'altra è la complementare). 	<p>Descrivi, senza disegnarla, la parabola individuata dall'equazione $y = x^2+6x+5$, precisando:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) se è concava verso l'alto o verso il basso; b) se incontra l'asse x e, in caso affermativo, in quanti punti; c) se presenta punti di ordinata positiva; d) se presenta punti di ordinata negativa; <p style="text-align: center;">(ITEM 6a ,6b, 6c, 6d)</p>
--	--------------------------------	---	--

3. DESTINATARI DEL PERCORSO DI APPRENDIMENTO

Esplicitazione dei destinatari (livello e tipologia di allievi) della prova, eventuali prerequisiti e percorso di apprendimento dei destinatari stessi al quale la prova si riferisce.

La prova di verifica qui analizzata è stata proposta durante un tirocinio attivo di Matematica tenutosi nel mese di dicembre 2008 presso un Istituto Agrario del cuneese che potrebbe intitolarsi "Disequazioni di secondo grado: risoluzione algebrica e risoluzione geometrica". La classe cui è stata proposta è una III di livello medio. Essa dovrebbe essere la logica conclusione di un percorso di apprendimento durato 10h basato su lezioni di vario genere:

- ❖ L'"attacco" avviene mediante la proiezione di slides che prevedono dei collegamenti con software matematici quali Geogebra e/o Cabri tali da rendere meno noiosa la lezione (1h) (Allegato 1).
- ❖ La volta successiva viene assegnata una scheda di lavoro (Allegato 2) con la quale i ragazzi, a coppie ed opportunamente guidati, imparano ad emulare quanto abbozzato dal professore in precedenza, prima facendo i calcoli a mano, poi utilizzando largamente il software, secondo un apprendimento per scoperta (2h).
- ❖ Seguono poi un paio di lezioni frontali di sistemazione teorica, in cui si cerca però di lasciar largo spazio agli interventi degli studenti, i quali a questo punto "digeriscono" meglio la teoria, perché alcune conclusioni le hanno già tratte da soli (1h+1h), in cui vengono presentate le slides successive (Allegato 3) che culminano nei due specchietti riassuntivi (Allegato 4), la cui fotocopia viene consegnata agli studenti.
- ❖ Sono previsti lavori di gruppo con carta e penna (2h) attraverso la consegna di una scheda di lavoro (Allegato 5) e due lezioni di esercizi svolti dai ragazzi che si alternano alla lavagna (1h+1h), tratti questa volta dal libro di testo.
- ❖ Vengono inoltre assegnati, di volta in volta, degli esercizi di vario tipo (V/F, completamenti, risoluzione di disequazioni con carta e penna) da svolgersi a casa, presi tutti dagli esercizi di fine capitolo.
- ❖ Viene assegnata, infine, la prova di verifica in esame (1h) che viene consegnata nell'ultima ora di tirocinio (1h), durante la quale vengono anche date le informazioni per il recupero (vedi paragrafo 9) e viene raccolto il feedback.

I prerequisiti richiesti sono schematizzati nella seguente tabella:

Prerequisiti	<u>Sapere</u>
	<ul style="list-style-type: none"> • Operazioni sugli insiemi • Calcolo numerico • Calcolo letterale • Principi di equivalenza • Equazioni di I e II grado

	<ul style="list-style-type: none"> • Parabola • Disequazioni razionali intere di I grado • Concetto di funzione • Rappresentazione grafica di una funzione • Concetto di intervallo • Traslazione • Uso di Geogebra <p><u>Saper fare</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Trovare le radici di un'equazione di II grado • Saper individuare i punti fondamentali di una parabola • Saper rappresentare graficamente una parabola
--	---

Abbiamo inserito, allegate le slides proposte e le schede di lavoro assegnate, benché non fossero indispensabili ai fini di questa relazione perché essi danno bene l'idea della globalità dell'intervento didattico proposto e giustificano la prova di verifica assegnata che ci apprestiamo ad analizzare, che è perfettamente coerente col percorso fatto.

Il percorso appena presentato ha infatti i seguenti obiettivi:

- ✓ promuovere l'apprendimento per scoperta delle disequazioni di secondo grado mediante l'uso di software;
- ✓ imparare a rappresentare graficamente una parabola di data equazione, prima mediante l'ausilio del computer, poi con carta e penna;
- ✓ conoscere la trattazione teorica alla base del metodo risolutivo delle disequazioni di secondo grado;
- ✓ imparare a risolvere algebricamente e graficamente le disequazioni di secondo grado complete;
- ✓ stabilire se una disequazione di secondo grado completa e incompleta ammette soluzioni oppure no e se si determinarle.
- ✓ saper passare dalla soluzione algebrica a quella scritta sotto forma di intervallo;
- ✓ promuovere il lavoro di gruppo come momento di crescita collettiva, sia cognitiva che sociale;
- ✓ promuovere i momenti in cui si apprende dai compagni, dunque il cooperative learning, efficaci perché gli studenti vedono il loro insegnamento in modo meno distaccato di quanto non farebbero col docente.

La prova in esame, ovviamente, verifica solo parte di questi obiettivi, nello specifico solo quelli contrassegnati con la parentesi graffa. Osserviamo che la parte svolta in aula

informatizzata non è oggetto di verifica. Non per questo va buttata via, anzi, essa permette di introdurre in modo divertente un argomento di per sé ostico, di far sì che gli studenti imparino senza quasi accorgersene un tema difficile della matematica ed arrivino al momento della trattazione teorica più "preparati", maggiormente consapevoli del significato della simbologia. A nostro avviso, infatti, inserire uno o più esercizi da svolgersi a computer potrebbe indurli ad assumere un atteggiamento negativo nei confronti di un software appena introdotto, e dunque "nuovo" e far sì che si concentrino maggiormente sulla parte di apprendimento dei comandi che non sulla comprensione dell'argomento. Essa serve dunque a dare l'idea della visione olistica del tema, senza perdersi sin dalla prima lezione in simbolismi troppo complessi per i ragazzi. Procedendo così, gli studenti prima capiscono il significato, poi passano al formalismo ed è questo, a nostro avviso il modo migliore di procedere. Una volta capito il concetto, infatti, il simbolismo diventa un semplice completamento della comprensione, mentre non è vero il viceversa!

4. TIPOLOGIA E STRUTTURA DELLA PROVA

Esplicitazione della tipologia e della struttura della prova e delle ragioni alla base della scelta di tale tipologia e struttura.

La prova in esame è di tipo sommativo, in quanto presentata alla fine di un tirocinio attivo di Matematica ed in quanto tale è atta a verificare il raggiungimento degli obiettivi indicati pocanzi e a fornire:

- all'insegnante tutor un resoconto del lavoro svolto dagli studenti, oggetto di valutazione e dunque del fatidico "voto" sul registro;
- al tirocinante un feedback sull'efficacia dell'intervento didattico proposto.

Come già osservato non sono presenti esercizi che richiedano l'uso del software, perché, come appena detto, il suo utilizzo ci interessa solo nella fase di scoperta, mentre la tipologia degli esercizi assegnati rispecchia appieno quella utilizzata di solito dall'insegnante "accogliente", oltre che il tipo di esercizi proposti durante le esercitazioni in classe e a casa (si vedano in proposito gli Allegati 2 e 4). Essa prevede infatti una parte che potremmo chiamare di interrogazione scritta, seguita da una parte in cui vengono assegnati degli esercizi standard relativi alle disequazioni di secondo grado ed una parte più creativa, in cui viene chiesto ai ragazzi di generalizzare quanto visto in aula anche se, è bene ammetterlo, il "salto" richiesto agli studenti è davvero minimo.

Osserviamo che nessun esercizio (e nessun item) è ripetitivo, ognuno è scelto per un preciso motivo (si legga obiettivo) ed è diverso dagli altri, secondo un processo continuo di passaggio dal generale al particolare e viceversa.

Ma veniamo ora all'organizzazione della prova:

ESERCIZIO 1:**1)** Data la disequazione $4x^2 - 12x + 9 > 0$

(PUNTI 12)

- risolvila algebricamente esplicitando i vari passaggi e scrivi la soluzione sotto forma di intervallo;
- risolvila poi graficamente.

Questo esercizio fa parte della grande batteria degli esercizi standard sulle disequazioni di secondo grado che possono essere assegnati. Esso è posto in apertura per permettere agli studenti di "rompere il ghiaccio", nel senso che per risolverlo è sufficiente applicare una procedura ben nota ed applicata più e più volte in classe. In realtà la sua semplicità è solo apparente in quanto esso permette di verificare contemporaneamente quasi tutti gli obiettivi di apprendimento che ci si era prefissi. Non a caso esso ha un certo peso in termini di punteggio (rispetto al punteggio complessivo)!

ESERCIZIO 2:**2)** Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F)

(PUNTI 4,5)

a) La disequazione $x^2 + x + 1 > 0$ non ammette soluzione

V F

b) Se $\Delta > 0$ la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ ha sempre infinite soluzioni

V F

c) Il numero zero non appartiene mai all'insieme soluzione della disequazione $ax^2 + bx < 0$

V F

d) Il numero zero appartiene sempre all'insieme soluzione della disequazione $ax^2 + c > 0$

V F

e) La disequazione $-x^2 - 1 \geq 0$ non ammette soluzione

V F

f) La disequazione $x^2 + 4x + 2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$

V F

g) La disequazione $x^2 - x + 3 \leq 0$ non ammette soluzione

V F

h) La disequazione $3x^2 - x + 1 > 0$ è verificata $\forall x \neq 1$

V F

i) La disequazione $x^2 + 10 < 0$ non ammette soluzione

V F

La scelta di questa tipologia di esercizio è principalmente dettata dall'assenza di tempo (la prova dura solo 1h) e dalla contemporanea necessità di verificare la comprensione di più casi particolari di disequazioni di secondo grado. L'utilizzo del V/F, infatti, se da un lato

permette di accertare l'apprendimento di più aspetti dello stesso tema, dall'altro presenta il grave inconveniente di non poter distinguere se lo studente abbia tirato ad indovinare oppure no; detto in altre parole *consente di verificare il prodotto ma non il processo*, come invece accade nell'esercizio 1, in cui viene richiesto di esplicitare tutti i passaggi. Questo giustifica in parte lo scarso rilievo che esso ha in termini di punteggio. Gli item di questo V/F sono tuttavia sufficientemente semplici da consentire anche ai più deboli di rispondere esattamente e di racimolare punti preziosi per la sufficienza.

La sua collocazione a questo punto della prova è intenzionale: si tratta infatti di domande semplici, che servono ad incentivare i ragazzi a prendere fiducia (per capire meglio si pensi, per contrasto, allo sconforto dello studente già bloccato al secondo esercizio!).

Osserviamo infine che per gli studenti non si tratta di una nuova tipologia di esercizio, bensì di una modalità di verifica della conoscenza che hanno più volte sperimentato a casa, svolgendo i test presenti sul libro di testo (e poi corretti in aula). Per i ragazzi non si tratta dunque del primo V/F: è questa una tipologia di domanda con cui hanno avuto modo di allenarsi durante tutto il tirocinio, e cui è bene che si abituino perché potrà tornar loro molto utile in futuro.

ESERCIZIO 3:

3) Completa le seguenti frasi:
(PUNTI 6)

a) La parabola è il dei punti del piano da un punto fisso detto e da una retta fissa detta

b) L'equazione $y = ax^2$ rappresenta una parabola avente come l'asse y, come vertice il punto $V = (\dots; \dots)$, come fuoco il punto $F(\dots; \dots)$ e come direttrice la retta $y = \dots$

c) Data la parabola $y = ax^2 + bx + c$, se $a > 0$ la parabola ha concavità verso

E' questo forse l'esercizio più semplice dell'intera prova: esso infatti serve ad accertare solo la conoscenza (e dunque nessun tipo di applicazione) della definizione di parabola come luogo geometrico (3a), delle sue caratteristiche in geometria analitica (3b) e della sua concavità (3c). Osserviamo che le stesse conoscenze avrebbero potuto essere verificate evitando l'uso del completamento e ponendo semplicemente le seguenti domande:

- Dai la definizione di parabola come luogo geometrico/ Qual è la definizione di parabola come luogo geometrico?
- Che cosa rappresenta in geometria analitica l'equazione $y=ax^2$? Quali sono e quali coordinate/ equazioni hanno le sue caratteristiche principali?
- Dove è rivolta la concavità della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, se $a > 0$?

Ovviamente la scelta del completamento favorisce gli studenti con maggiori difficoltà, non tanto in matematica ma nella memorizzazione di definizioni, considerate inutili. In questo caso la posizione scelta (circa a metà della prova) è in linea con quella dell'esercizio precedente. Ancora una volta il punteggio non è elevato, ma è

proporzionato al livello di difficoltà, decisamente basso visto e considerato il fatto che coinvolge solo la conoscenza dell'argomento.

La scelta di inserire una domanda puramente teorica è dettata da precise esigenze del tutor, il quale, a causa dell'elevato numero di studenti e della vastità del programma da svolgere, difficilmente riesce a trovare il tempo di interrogarli tutti oralmente più volte nel corso del quadrimestre. Questa domanda è quindi un efficace escamotage per sopperire a questa mancanza. Va però anche detto che, proprio per come è stata strutturata, questa domanda presenta un'altissima possibilità di essere copiata o suggerita. Tale possibilità diminuirebbe se la organizzassimo in modo diverso chiedendo, come già detto, semplicemente la definizione oppure suddividendo le prove a file e domandando solo una caratteristica (vertice piuttosto che direttrice) a ciascuna.

ESERCIZIO 4:

4) Completa in modo opportuno le seguenti disuguaglianze:
(PUNTI 10)

- a) $\forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione di $x^2 \dots\dots\dots 25 > 0$
 b) impossibile è soluzione di $x^2 \dots\dots\dots 7 < 0$
 c) $2 < x < 5$ è soluzione di $x^2 - \dots x + \dots < 0$
 d) $\forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione di $2x^2 - x + 1 \dots\dots 0$
 e) $x \leq 4 \vee x \geq 6$ è soluzione di $x^2 - \dots x \dots\dots \geq 0$

Questo esercizio è di completamento, come il precedente, ma decisamente più complicato: esso infatti mette in gioco processi (della tassonomia di Anderson & Krathwohl) più complessi del semplice ricordare, come il creare. Viene infatti richiesto da un lato di rievocare casi di disequazioni di secondo grado già visti, dall'altro di generalizzarli alla situazione in esame. Si ribalta il punto di vista (il che è fonte di nuove difficoltà): non si inizia più dalla disequazione per giungere alla soluzione ma partire dalla soluzione si richiede la disequazione. Osserviamo che nessun item è ripetitivo, non vi sono cioè due items che chiedano l'applicazione della stessa regola e, anche quando sembra essere così, come nel caso di $\forall x \in \mathbb{R}$ in uno si richiede che la disequazione di cui è soluzione sia incompleta (4a), nell'altro che sia completa (4d).

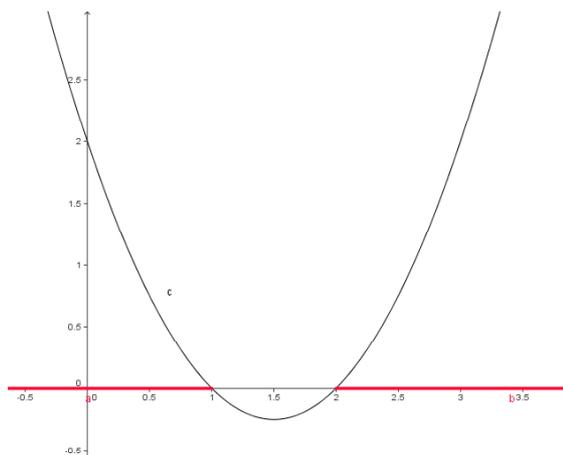
Si tratta di un esercizio di una certa complessità, in cui anche se non vengono esplicitati i passaggi è possibile capire molti dei processi messi in atto dallo studente (ad esempio se abbia chiaro o no il fatto che $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$) e di programmare il conseguente recupero (un po' come avveniva già con l'esercizio 1, nel quale però la possibilità di azzeccare la risposta tirando a caso era ancor maggiore). Il punteggio è proporzionato alla difficoltà (si richiedono infatti capacità superiori rispetto alla semplice conoscenza) ma al tempo stesso non è esagerato, per non "danneggiare" eccessivamente i più deboli. Anche la collocazione è scelta nell'ottica di un aumento progressivo del livello di comprensione dell'argomento.

ESERCIZIO 5:

5) La seguente figura illustra la risoluzione grafica di una disequazione di 2° grado. A quale delle seguenti disequazioni si riferisce? Giustifica la tua risposta.

(PUNTI 7,5)

- $x^2 - 3x + 2 \leq 0$
- $-x^2 - 3x + 2 \leq 0$
- $-x^2 - 3x + 2 \geq 0$
- $x^2 - 3x + 2 \geq 0$



Si tratta di un esercizio abbastanza difficile, che mobilita i processi di analisi e di riorganizzazione delle conoscenze in un sistema organico. E' questo un esercizio semi-aperto, nel senso che, se da un lato vengono fornite quattro diverse opzioni (che lo rendono chiuso), dall'altro viene richiesta una giustificazione per la scelta operata, in modo che la risposta non possa essere lasciata la caso come nei V/F (anche se, bisogna dirlo, la probabilità di azzeccarla qui scende dal 50% al 25%!). In questo modo si verificano anche le capacità logiche degli studenti nella riorganizzazione delle conoscenze e la loro proprietà di linguaggio. A questa seconda parte dell'esercizio viene data l'importanza maggiore (5 punti su 7,5 totali), proprio perché l'obiettivo che si vuole verificare è più che altro quello della ricostruzione logica del percorso fatto.

Vista la complessità dei processi messi in atto il punteggio è abbastanza elevato e la collocazione coerente con l'andamento di crescente difficoltà della prova.

Osserviamo che la complessità dell'esercizio potrebbe essere ulteriormente aumentata eliminando le 4 opzioni e chiedendo di fornire "ex novo" l'equazione della parabola rappresentata e la corrispondente disequazione di cui essa è soluzione (rendendo l'esercizio aperto). Ciò implicherebbe però l'uso di tecniche di geometria analitica (risoluzione di un sistema lineare di 3 equazioni nelle 3 incognite a,b,c) per determinare l'equazione della parabola per 3 punti, la cui verifica non ci interessa in questa fase (è già stata oggetto di una prova di verifica precedente). Da qui la scelta di inserire le quattro opzioni, semplificando la vita degli studenti e permettendoci al tempo stesso di concentrare l'attenzione sulle disequazioni di secondo grado, oggetto dell'intervento didattico.

ESERCIZIO 6:

6) Descrivi, senza disegnarla, la parabola individuata dall'equazione $y = x^2 + 6x + 5$, precisando: (PUNTI 14)

- a) se è concava verso l'alto o verso il basso;
- b) se incontra l'asse x e, in caso affermativo, in quanti punti;
- c) se presenta punti di ordinata positiva;
- d) se presenta punti di ordinata negativa.

Si tratta di una tipologia di esercizio che non è mai stata proposta in classe: i ragazzi sono infatti abituati a partire disegnando la parabola (vertice, asse di simmetria, intersezioni con gli assi,...) per cui il fatto di doverla solo descrivere può rappresentare uno scoglio notevole per loro. Si tratta quindi di un esercizio nuovo per loro, anche se il livello di generalizzazione richiesto, il "salto concettuale" è più che fattibile. Se però gli item a) e b) sono relativamente semplici (per cui si immagina che arrivino a rispondervi più o meno tutti), i punti c) e d) richiedono innanzitutto una buona capacità d'interpretazione del testo, ma anche l'applicazione delle regole per la risoluzione delle disequazioni associate. E' questo l'esercizio più difficile dell'intera prova (non a caso proposto al fondo della stessa), cui è associato quindi un punteggio elevato, e destinato pertanto, per lo meno nella sua seconda parte, agli studenti più bravi. Osserviamo che la richiesta di non disegnare la parabola non serve solo ad obbligare i ragazzi ad una maggiore astrazione, ma anche ad evitare che forniscano la soluzione grafica ai punti c) e d), decisamente più semplice rispetto a quella analitica richiesta.

Osserviamo infine incidentalmente che solo nell'esercizio 1 viene richiesta la risoluzione grafica della disequazione di secondo grado: nell'esercizio 5 infatti la soluzione grafica è già fornita mentre nell'esercizio 6 viene richiesta solo la descrizione della parabola, non la sua rappresentazione grafica. Si tratta di una scelta tutt'altro che casuale che va, tra l'altro, di pari passo con l'intenzione di soffermare l'attenzione più sulle disequazioni che non sulle regole di geometria analitica che vi stanno alle spalle. Tali regole rimangono ciò nonostante molto importanti e non indispensabili a questo livello della trattazione, tant'è che la loro conoscenza è oggetto dell'esercizio più semplice dell'intera prova, il numero 3.

5. ACCORGIMENTI PER LA SOMMINISTRAZIONE DELLA PROVA

Esplicitazione degli accorgimenti da adottare per la somministrazione della prova (presentazione agli allievi, condizioni per la compilazione, tempo assegnato per la compilazione, ecc.).

Il giorno di somministrazione della prova (la cui data è stata scelta in accordo con la classe, cercando di evitare spiacevoli sovrapposizioni con prove scritte e/o interrogazioni di altre discipline), si dividono i banchi, e si consegna ad ogni studente una fotocopia con il testo. A questo punto:

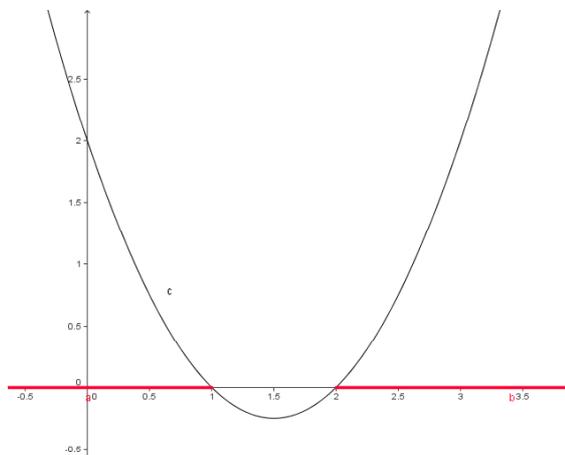
- si esplicita che il tempo a loro disposizione è di 55 minuti;
- l'insegnante legge il testo della prova avendo cura di sottolinearne i passaggi cruciali e risponde ad eventuali domande su di esso;
- l'insegnante sottolinea e promette che, a coloro che verranno sorpresi a copiare, verrà ritirata la prova immediatamente.

E' inoltre opportuno che la prova contenga già, a fianco di ciascun esercizio, il punteggio massimo assegnato nel caso in cui risulti tutto esatto, in modo che i ragazzi sappiano su quali esercizi è meglio concentrarsi, per farsi un'idea del numero minimo di risposte esatte necessarie per ottenere la sufficienza e per avere, magari già alla fine della prova, una vaga idea del "voto da aspettarsi". Se richiesto, il docente deve inoltre rispondere a domande più specifiche sull'attribuzione dei punteggi (es. per l'esercizio n°3 6 punti = 2+2+2). A posteriori osserviamo che sarebbe stato meglio inserire già sulla prova anche i punteggi parziali: ad esempio:

ESERCIZIO 5:

5) La seguente figura illustra la risoluzione grafica di una disequazione di 2° grado. A quale delle seguenti disequazioni si riferisce? Giustifica la tua risposta. (PUNTI 2,5+5=7,5)

- $x^2 - 3x + 2 \leq 0$
- $-x^2 - 3x + 2 \leq 0$
- $-x^2 - 3x + 2 \geq 0$
- $x^2 - 3x + 2 \geq 0$



Molto importante è inoltre la suddivisione della classe in 2 file, per diminuire la possibilità di copiare. E' quindi necessario che i banchi siano disposti in file verticali precise, e che siano il più possibile distanziati i componenti della stessa fila. E' dunque preferibile fare una fila in più ma evitare eccessive vicinanze.

Inseriamo qui di seguito la fila B (quella di cui ci siamo occupati finora è la A):

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA

1) Data la disequazione $8x^2 + 8x + 2 > 0$
(PUNTI 12)

- risolvila algebricamente esplicitando i vari passaggi e scrivi la soluzione sotto forma di intervallo;
- risolvila poi graficamente.

2) Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F)
(PUNTI 4,5)

- a) La disequazione $x^2 + 6x + 5 > 0$ non ammette soluzione
V F
- b) Se $\Delta > 0$ la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ ha sempre infinite soluzioni
V F
- c) Il numero zero appartiene sempre all'insieme soluzione della disequazione $ax^2 + bx < 0$
V F
- d) Il numero zero non appartiene mai all'insieme soluzione della disequazione $ax^2 + c > 0$
V F
- e) La disequazione $-4x^2 - 4 \geq 0$ non ammette soluzione
V F
- f) La disequazione $x^2 - 4x + 2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$
V F
- g) La disequazione $x^2 - x - 3 \leq 0$ non ammette soluzione
V F

h) La disequazione $x^2 - x + 3 > 0$ è verificata per $x = 3$

V F

i) La disequazione $x^2 + 10 < 0$ ammette soluzione

V F

3) Completa le seguenti frasi:

(PUNTI 6)

a) La parabola è il dei punti del piano da un punto fisso detto e da una retta fissa detta

b) L'equazione $y = ax^2$ rappresenta una parabola avente come l'asse y, come vertice il punto $V = (\dots; \dots)$, come fuoco il punto $F(\dots; \dots)$ e come direttrice la retta $y = \dots$

c) Data la parabola $y = ax^2 + bx + c$, se $a < 0$ la parabola ha concavità verso

4) Completa in modo opportuno le seguenti disuguaglianze:

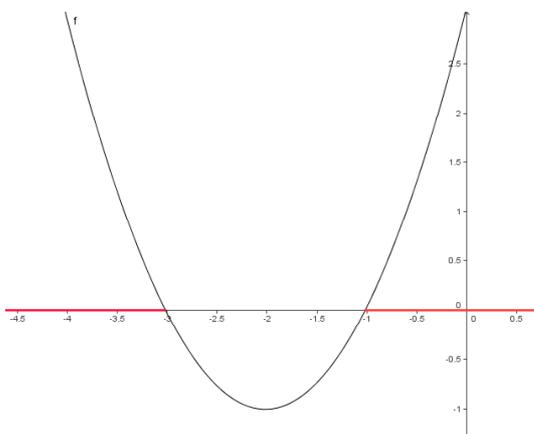
(PUNTI 10)

- | | |
|-------------------------------|--|
| a) $\forall x \in \mathbb{R}$ | è soluzione di $-x^2 \dots - 9 < 0$ |
| b) impossibile | è soluzione di $x^2 \dots + 4 < 0$ |
| c) $3 < x < 4$ | è soluzione di $x^2 + \dots x + \dots < 0$ |
| d) $\forall x \in \mathbb{R}$ | è soluzione di $2x^2 + 10 \dots 0$ |
| e) $x \leq 1 \vee x \geq 5$ | è soluzione di $-x^2 + \dots x \dots \leq 0$ |

5) La seguente figura illustra la risoluzione grafica di una disequazione di 2° grado. A quale delle seguenti disequazioni si riferisce? Giustifica la tua risposta.

(PUNTI 7,5)

- $x^2 + 4x + 3 \leq 0$
- $-x^2 - 4x + 3 \leq 0$
- $x^2 + 4x + 3 \geq 0$
- $-x^2 - 4x + 3 \geq 0$



6) Descrivi, senza disegnarla, la parabola individuata dall'equazione $y = -x^2 + 6x + 8$, precisando: (PUNTI 14)

- a) se è concava verso l'alto o verso il basso;
- b) se incontra l'asse x e, in caso affermativo, in quanti punti;
- c) se presenta punti di ordinata negativa.
- d) se presenta punti di ordinata positiva;

Come risulta evidente dal loro confronto le due file differiscono solo nei valori numerici e non nella difficoltà, che è la stessa per entrambe sto. E' questo un fatto fondamentale: il livello di conoscenza richiesto deve essere lo stesso! Solo l'esercizio 3, quello puramente teorico è uguale in entrambe, perché in quanto tale era impossibile modificarlo.

Osserviamo che sarebbe stato possibile proporre altre due file, la C e la D, per diminuire ulteriormente le possibilità di copiatura. Come abbiamo già osservato, infatti, la prova somministrata è facilmente modificabile, per cui sarebbe stato questione di un attimo ricavarle. In questo modo, inoltre, avremmo avuto a disposizione un maggior numero di esercizi per l'eventuale attività di recupero.

Al termine della prova è bene che gli studenti consegnino contemporaneamente, in modo che non vengano fatti veri o presunti favoritismi.

E' infine opportuno che la prova venga riconsegnata corretta nel più breve tempo possibile, magari già la lezione successiva, in modo che i ragazzi abbiano ancora freschi i dubbi e si possano chiarire eventuali errori concettuali. Sarebbe infatti una pessima idea fare la correzione prima ancora di aver corretto la prova o, peggio, di averla riconsegnata. E' infatti indispensabile che gli studenti, in questa fase, abbiano sotto mano gli errori compiuti ed assumano consapevolezza dei motivi che li hanno spinti a sbagliare, in modo da non ripeterli in futuro. Senza la prova sotto gli occhi la correzione risulta essere una mera esposizione di sapere da parte del docente, priva di qualunque valenza formativa e/o didattica.

6. CRITERI DI VALUTAZIONE E REGOLE DI ASSEGNAZIONE DEI PUNTEGGI

Esplicitazione e giustificazione dei criteri di valutazione e delle regole di assegnazione dei punteggi (matrici di correzione), ai singoli item e all'intera prova e delle regole adottate per il passaggio dai punteggi nella prova ai voti finali.

Per ogni esercizio è stato stabilito un punteggio massimo che tiene conto della sua difficoltà rispetto al resto della prova. Nella tabella accanto sono riportati i punteggi massimi che si totalizzano svolgendo, in modo esatto e completo, i sei esercizi che compongono la prova. Per ogni esercizio, è inoltre indicata a quale percentuale del punteggio totale corrisponde il punteggio massimo assegnato.

<i>Esercizio</i>	<i>Punteggio massimo</i>	
1	12.0	22 %
2	4.5	8 %
3	6.0	11 %
4	10.0	19 %
5	7.5	14 %
6	14.0	26 %
Totale	54.0	100

I punteggi più elevati sono quelli assegnati agli esercizi 1, 4, e 6. La giustificazione di questa scelta è già emersa nella precedente analisi, relativa alla tipologia e alla struttura della prova. È stato sottolineato come l'esercizio 1 consenta la verifica della maggior parte degli obiettivi di apprendimento scelti quali termine ultimo dell'unità didattica svolta, mentre gli esercizi 4 e 6 coinvolgano processi mentali complessi, quelli collocati sui gradini più alti della tassonomia di Anderson & Krathwohl. Da questo punto di vista, anche il punteggio assegnato all'esercizio 5 è da considerarsi elevato: del resto l'esercizio si compone di un unico item a risposta chiusa con l'esplicita richiesta di giustificazione della scelta fatta; anche in questo caso i processi che occorre attivare non sono tra i più semplici, la richiesta di spiegazione induce lo studente a sviluppare ragionamenti metacognitivi niente affatto scontati o banali. Gli esercizi 2 e 3 sono quelli ai quali sono stati assegnati i punteggi più bassi; la tipologia degli item (in entrambi i casi a risposta chiusa) non consente nell'esercizio 2 la verifica dei processi attuati per giungere alla scelta tra 'vero' o 'falso'; nell'esercizio 3 il completamento consente di accertare soltanto il raggiungimento di obiettivi di conoscenza.

Il prospetto seguente riassume, per ogni esercizio, quali obiettivi della tassonomia di Anderson & Krathwohl siano coinvolti. È utile il suo confronto con la precedente tabella dei punteggi per valutare la coerenza della loro scelta.

<i>Esercizio</i>	<i>Obiettivi della tassonomia di Anderson & Krathwohl</i>				
	<i>Ricordare Rievocare</i>	<i>Comprendere Interpretare</i>	<i>Applicare Eeguire</i>	<i>Analizzare Organizzare</i>	<i>Creare Generare</i>
1	x	x	x		
2	x		x		
3	x				
4	x	x			x
5	x	x	x	x	
6	x	x		x	

Ogni singolo esercizio consente la verifica dell'avvenuto raggiungimento di uno o più obiettivi di apprendimento ed è spesso composto di item distinti. Per questo motivo il punteggio assegnato ad ogni esercizio è stato suddiviso come è indicato nella seguente griglia di valutazione.

Esercizio	Suddivisione dell'esercizio	Distribuzione del punteggio	P. max
1	Soluzione algebrica della disequazione	0 soluzione errata/non data	12.0
		+5.0 soluzione esatta; - 0.5 per ogni errore di calcolo/segno; - 0.5 per ogni errore relativo alla scelta sull'inclusione degli estremi dell'intervallo.	
	Soluzione grafica della disequazione	0 soluzione errata/non data	
		+ 5.0 soluzione esatta; - 0.5 per ogni errore relativo alla scelta sull'inclusione degli estremi dell'intervallo.	
	Scrittura della soluzione con la simbologia degli intervalli	0 risposta errata/non data	
		+ 2.0 scrittura corretta; - 0.5 per ogni errore relativo alla scelta sull'inclusione degli estremi dell'intervallo.	
2	L'esercizio si compone di 9 item distinti ($a - i$)	0 risposta errata/non data	4.5
		+ 0,5 risposta esatta (punti per item)	
3	Item (a) (4 completamenti)	0 risposta errata/non data	2.0
		+ 0.5 risposta esatta (punti per completamento)	
	Item (b) (4 completamenti)	0 risposta errata/non data	2.0
		+ 0.5 risposta esatta (punti per completamento)	
	Item (c) (1 completamento)	0 risposta errata/non data	2.0
		+ 2.0 risposta esatta	
4	L'esercizio si compone di 5 item distinti	0 risposta errata/non data	10.0
		+ 2.0 risposta esatta (punti per item)	
5	Item a risposta multipla	0 risposta errata/non data	7.5
		+ 2.5 risposta esatta	
	Risposta aperta alla richiesta di giustificazione	0 risposta errata/non data	
		+ 5.0 risposta esatta ed esauriente; - 1.0 per ogni imprecisione o utilizzo di espressioni linguistiche non chiare	
6	La concavità della parabola (a)	0 risposta errata/non data	14.0
		+ 2.0 risposta esatta	
	Le intersezioni con l'asse delle ascisse (b)	0 risposta errata/non data	
		+ 2.0 risposta esatta; - 0.5 per ogni errore di calcolo/segno;	
	I punti della parabola di ordinata positiva (c)	0 risposta errata/non data	
		+ 5.0 risposta esatta	
	I punti della parabola di ordinata negativa (d)	0 risposta errata/non data	
		+ 5.0 risposta esatta	

Dalla precedente griglia di valutazione si osserva che per ogni parte (o item) di ciascun esercizio è stato assegnato un punteggio nullo sia nel caso in cui la soluzione (o la risposta) manchi del tutto, sia qualora la soluzione (o il risultato) sia completamente errata.

Per gli esercizi composti da item a stimolo e risposta chiusi (esercizi 2, 3, 4) non sono previsti punteggi intermedi tra quello nullo e quello assegnato alla risposta esatta; quest'ultimo è stato scelto valutando il 'peso' dell'item rispetto al punteggio complessivo della prova. Negli esercizi che prevedono l'applicazione e lo sviluppo di procedimenti e l'esplicitazione dei risultati utilizzando il linguaggio algebrico, grafico o verbale (esercizi 1, 5, 6), sono previste penalità (vale a dire punteggi negativi da sommare algebricamente al punteggio massimo) per gli errori di calcolo o gli errori nell'utilizzo della simbologia per la rappresentazione delle soluzioni.

Il punteggio che si totalizza svolgendo in modo completamente corretto l'intera prova è 54.0.

Per convertire il punteggio in decimi è stata utilizzata la formula seguente:

$$P_{10} = 3 + \frac{P_{54} \times 7}{54},$$

dove P_{54} indica il punteggio totalizzato dallo studente nello svolgimento della prova.

Il punteggio minimo espresso in decimi è dunque pari a $3/10$ e corrisponde a $P_{54} = 0$.

Il punteggio massimo espresso in decimi è pari a 10 e corrisponde a $P_{54} = 54$.

L'assegnazione del voto finale, espresso in decimi, avviene arrotondando le prime due cifre decimali del punteggio P_{10} come indicato nel prospetto accanto:

$1/100 - 12/100$	\rightarrow	0.00
$13/100 - 37/100$	\rightarrow	0.25
$38/100 - 62/100$	\rightarrow	0.50
$63/100 - 87/100$	\rightarrow	0.75
$88/100 - 99/100$	\rightarrow	1.00

In questo modo, considerando ad esempio i punteggi compresi tra 6.00 e 7.00, i voti possibili risultano:

Punteggio P_{10} arrotondato	VOTO
6.00	6
6.25	6 +
6.50	$6 \frac{1}{2}$
6.75	6/7
7.00	7

Resta da fare ancora la considerazione seguente:

la sufficienza (il sei) corrisponde al punteggio $P_{54} = 23$. È un punteggio molto basso; lo studente che lo totalizza ha svolto correttamente appena il 43 % della prova. Chi ottiene il punteggio $P_{54} = 28$ (quindi svolge correttamente circa il 51 % della prova) avrà un voto superiore al $6 \frac{1}{2}$.

Senza dubbio questa considerazione deve essere calata nel contesto in cui la prova è stata preparata e svolta. Del resto anche la successiva analisi dei risultati per quanto rigorosa e attendibile, assume significato e valore qualora la si rapporti agli aspetti relativi alla classe, all'insegnante, alla scuola.

7. RESOCONTO DELLA SOMMINISTRAZIONE E ANALISI DEI RISULTATI

Resoconto della somministrazione della prova ad un gruppo di allievi (contesto in cui la prova è stata testata, numero di allievi, tempi effettivamente impiegati, osservazioni relative all'applicazione degli accorgimenti di somministrazione, reazioni degli allievi, ecc.) ed esplicitazione delle tabelle dei risultati degli allievi.

La prova è stata somministrata in una classe terza di un istituto agrario, composta da tredici alunni (tutti presenti nel giorno concordato per la verifica). Lo svolgimento della prova è avvenuto nei tempi prestabiliti (l'ora di lezione, di 55 minuti). L'insegnante ha dedicato alcuni minuti iniziali alla lettura del testo della prova; non si sono verificate reazioni di disappunto e sono stati richiesti, da parte degli studenti, due soli chiarimenti relativi agli item; non sono state spese troppe parole rispetto all'assegnazione dei punteggi (per altro indicati sulla fotocopia, accanto al testo di ogni esercizio).

La classe ha mantenuto la concentrazione e il silenzio durante tutta l'ora; l'insegnante non è intervenuta a interrompere alcun tentativo evidente di comunicazione e/o 'copiatura' tra studenti.

Nella **tabella 1** sono indicati, per ogni alunno,

- il punteggio totalizzato per ogni esercizio (dall'esercizio 1 all'esercizio 6; non sono specificati i punteggi per item);
- il punteggio totale P_{54} ;
- il punteggio in decimi P_{10} , ottenuto secondo i criteri precedentemente illustrati;
- il voto finale, ottenuto arrotondando P_{10} .

	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Punteggio totale su 54	Punteggio totale su 10	Voto finale
Alunno 1	7,5	3,0	4,5	4,0	4,0	8,0	31,0	7,02	7,00
Alunno 2	8,5	4,0	3,0	4,0	3,0	9,5	32,0	7,15	7,25
Alunno 3	5,5	2,5	2,0	2,0	4,0	4,0	20,0	5,59	5,50
Alunno 4	9,0	4,0	6,0	4,0	7,0	13,5	43,5	8,64	8,75
Alunno 5	8,0	3,5	6,0	4,0	6,5	10,0	38,0	7,93	8,00
Alunno 6	10,0	4,5	5,0	8,0	5,0	4,0	36,5	7,73	7,75
Alunno 7	5,5	4,5	5,5	0,0	3,5	3,5	22,5	5,92	6,00
Alunno 8	6,0	3,5	4,5	0,0	5,0	2,0	21,0	5,72	5,75
Alunno 9	4,5	3,0	5,5	4,0	2,5	5,0	24,5	6,18	6,25
Alunno 10	8,5	4,0	6,0	4,0	7,0	8,5	38,0	7,93	8,00
Alunno 11	11,0	4,0	6,0	8,0	7,5	12,0	48,5	9,29	9,25
Alunno 12	4,0	3,5	3,0	4,0	0,0	0,0	14,5	4,88	4,75
Alunno 13	5,5	4,0	5,0	2,0	0,0	2,0	18,5	5,40	5,50

Tabella 1

Raggruppando in classi le valutazioni degli studenti si ottiene la distribuzione di frequenza presentata nella **tabella 2**, nel diagramma a barre in **figura 1** e nel diagramma a torta in **figura 2**.

Classi	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza cumulativa assoluta	Frequenza cumulativa relativa
$3 \leq \text{Voto} < 4$	0	0,0	0	0,0
$4 \leq \text{Voto} < 5$	1	7,7	1	7,7
$5 \leq \text{Voto} < 6$	3	23,1	4	30,8
$6 \leq \text{Voto} < 7$	2	15,4	6	46,2
$7 \leq \text{Voto} < 8$	3	23,1	9	69,2
$8 \leq \text{Voto} < 9$	3	23,1	12	92,3
$9 \leq \text{Voto} < 10$	1	7,7	13	100,0
Voto = 10	0	0	13	100,0
Totale	13	100,0	-	-

Tabella 2

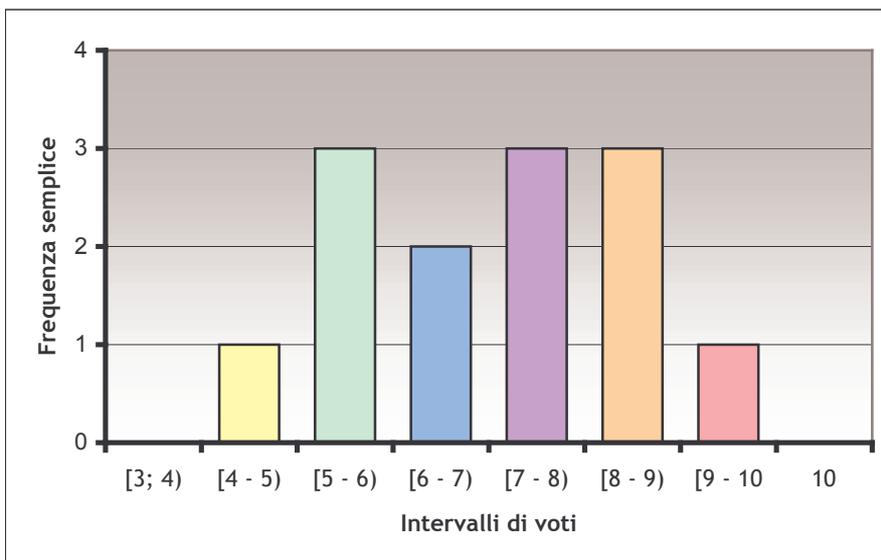


Figura 1 _ Voti degli studenti: distribuzione di frequenza in classi (diagramma a barre)

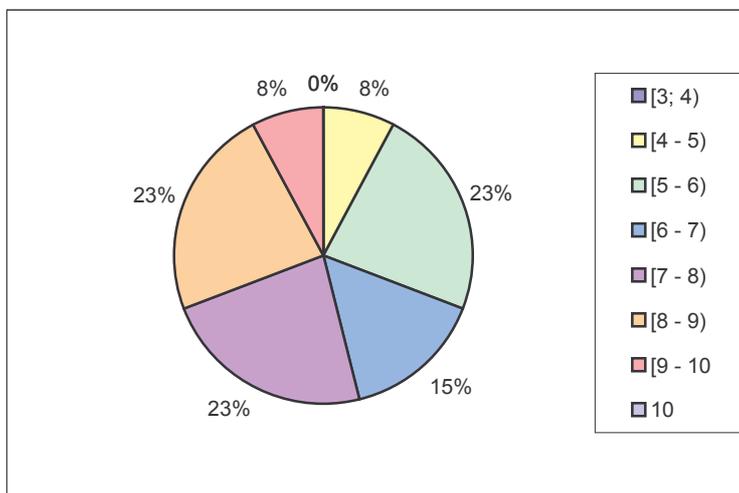


Figura 2 _ Voti degli studenti: distribuzione di frequenza in classi (diagramma a torta)

Nella **tabella 3** gli studenti vengono ordinati sfruttando un importante indice di posizione che è il cosiddetto punteggio z (o punteggio standardizzato); i punteggi z sono utili per collocare gli allievi su una scala sulla quale sia stato annullato l'effetto della media e della deviazione standard. La formula che si utilizza è la seguente: $z = \frac{P - \mu}{\sigma}$, dove μ è il punteggio medio, σ è la deviazione standard. I punteggi z , essendo frazionari, sono spesso scomodi da utilizzare; pertanto sono stati ricodificati in undici categorie (punti C di Guilford) e in cinque categorie (punti della distribuzione pentenaria).

<i>Alunni</i>	<i>Voto approssimato</i>	<i>Punteggio standardizzato</i>	<i>Punto C di Guilford</i>	<i>Punto pentenaria</i>
A12	4,75	-1,55	2	A
A3	5,50	-1,01	3	B
A13	5,50	-1,01	3	B
A8	5,75	-0,83	3	B
A7	6,00	-0,65	4	B
A9	6,25	-0,47	4	C
A1	7,00	0,07	5	C
A2	7,25	0,25	6	C
A6	7,75	0,61	6	D
A5	8,00	0,79	7	D
A10	8,00	0,79	7	D
A4	8,75	1,32	8	D
A11	9,25	1,68	8	E
Media	6,90	0		
Dev. St	1,39	1		

Osservazioni

I risultati confermano l'usuale andamento della classe, con un miglioramento non trascurabile relativo alla fascia di studenti più deboli, le cui valutazioni, pur insufficienti, sono, a detta dell'insegnante di classe, più alte rispetto alla media dei voti del singolo studente.

Gli studenti che hanno ottenuto un voto maggiore o uguale alla sufficienza (sei) sono 9 su 13, in percentuale il 69 %. Delle quattro insufficienze, soltanto una è inferiore al 5 mentre le restanti tre sono maggiori o uguali al 5 $\frac{1}{2}$. A nessun studente è stato dato il voto massimo (dieci); un solo studente ha ottenuto un voto superiore a nove.

Osservando il diagramma in figura 1, lungi dal voler proporre un'interpretazione statistica data l'esiguità del campione analizzato, si può comunque notare una distribuzione abbastanza uniforme dei voti delle fasce centrali, mentre non si legge alcun valore di frequenza degno di nota.

8. ANALISI DEGLI ITEM

Analisi dei dati emersi dalla somministrazione della prova (moda, mediana, media e scarto tipo dei risultati) e analisi degli item (indici di difficoltà, selettività, affidabilità, potere discriminante) per ciascuno degli item della prova stessa, con considerazioni sulla loro bontà e sull'opportunità di conservarli in una versione successiva della prova.

Nella **tabella 1** sono calcolati gli indici statistici tradizionali relativi ad ogni esercizio, al punteggio e al voto finali.

	1	2	3	4	5	6	Punteggio totale su 54	Punteggio totale su 10	Voto finale
<i>Punteggio min</i>	0	0	0	0	0	0	0	3,00	3,00
<i>Punteggio max</i>	12,0	4,5	6,0	10,0	7,5	14,0	54,0	10,00	10,00
<i>Media</i>	7,2	3,7	4,8	3,7	4,2	6,3	29,9	6,87	-
<i>Dev.st.</i>	2,2	0,6	1,3	2,4	2,5	4,2	10,6	1,37	-
<i>Moda</i>	5,5	4,0	6,0	4,0	4,0	4,0	38,0	-	5,50
<i>Mediana</i>	7,5	4,0	5,0	4,0	4,0	5,0	31,0	-	7,00

Tabella 1

La media dei voti finali è 6.87, dunque pienamente sufficiente, con deviazione standard 1.37. La moda è 5.50 (voto ottenuto da due allievi); la mediana è 7.00.

Come è stato precedentemente sottolineato, l'assegnazione dei punteggi ai singoli esercizi è stata conseguenza diretta della scelta del peso per ogni esercizio.

Perché sia possibile un primo confronto tra i sei esercizi proposti (l'analisi specifica degli item sarà ripresa nel paragrafo successivo), sono riportati nella **tabella 2** tutti i punteggi espressi in decimi.

Per convertire i punteggi è stata nuovamente utilizzata, per ogni esercizio, la formula $P_{10} = 3 + \frac{P_{ottenuto} \times 7}{P_{max}}$, dove $P_{ottenuto}$ indica il punteggio totalizzato dallo studente nello svolgimento di un determinato esercizio, il cui punteggio massimo è P_{max} .

Ad esempio, per convertire in decimi il punteggio dell'esercizio 1, la formula diventa

$$P_{10} = 3 + \frac{P_{12} \times 7}{12}.$$

	1	2	3	4	5	6
<i>Alunno 1</i>	7,38	6,50	8,25	5,80	6,73	7,00
<i>Alunno 2</i>	7,96	9,22	6,50	5,80	5,80	7,75
<i>Alunno 3</i>	6,21	6,89	5,33	4,40	6,73	5,00
<i>Alunno 4</i>	8,25	9,22	10,00	5,80	9,53	9,75
<i>Alunno 5</i>	7,67	8,44	10,00	5,80	9,07	8,00
<i>Alunno 6</i>	8,83	10,00	8,83	8,60	7,67	5,00
<i>Alunno 7</i>	6,21	10,00	9,42	3,00	6,27	4,75
<i>Alunno 8</i>	6,50	8,44	8,25	3,00	7,67	4,00
<i>Alunno 9</i>	5,63	7,67	9,42	5,80	5,33	5,50
<i>Alunno 10</i>	7,96	9,22	10,00	5,80	9,53	7,25
<i>Alunno 11</i>	9,42	9,22	10,00	8,60	10,00	9,00
<i>Alunno 12</i>	5,33	8,44	6,50	5,80	3,00	3,00
<i>Alunno 13</i>	6,21	9,22	8,83	4,40	3,00	4,00

	1	2	3	4	5	6
<i>Punteggio min</i>	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
<i>Punteggio max</i>	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0
<i>Media</i>	7,20	8,65	8,56	5,58	6,95	6,15
<i>Dev.st.</i>	1,27	1,08	1,55	1,70	2,31	2,11
<i>Moda</i>	6,21	9,22	10,00	5,80	6,73	5,00
<i>Mediana</i>	7,38	9,22	8,83	5,80	6,73	5,50

Tabella 2

Osservazioni

Il punteggio medio più basso è quello relativo all'**esercizio 4**. è l'unica media non sufficiente rispetto ai criteri fissati; del resto l'esercizio 4 è stato in precedenza classificato come difficile, dal momento che richiede il coinvolgimento di processi mentali complessi. Solo due studenti hanno ottenuto un punteggio sufficiente (per altro un punteggio più che buono); tra le insufficienze figurano anche due punteggi minimi (assegnati all'esercizio non svolto o completamente errato).

All'**esercizio 6**, progettato per essere il più difficile, è invece associato un punteggio medio che, pur essendo basso, risulta tuttavia sufficiente; in tal caso però il valore della deviazione standard è piuttosto alto: i voti ottenuti dagli studenti si discostano molto dal valor medio (il voto più frequente è stato il 5 e più della metà della classe ha avuto un voto minore o uguale al 5,50). Sei studenti hanno ottenuto un punteggio sufficiente, due dei quali hanno totalizzato un punteggio maggiore o uguale a nove. Tra le insufficienze, quattro punteggi sono inferiori al cinque.

L'**esercizio 5** ha avuto risultati che possono essere considerati migliori: il punteggio medio è di poco inferiore al sette; i punteggi non sufficienti si riducono a quattro (uno dei quali è prossimo al sei); quattro sono anche gli studenti che hanno ottenuto un punteggio superiore al nove (figura anche un punteggio massimo). Per questo esercizio si registra lo scostamento maggiore dalla media: del resto tra i punteggi registrati figurano due tre e un dieci.

Gli esercizi 2 e 3 sono quelli che registrano i punteggi medi più alti (in entrambi i casi superiori a 8,50). I punteggi relativi all'**esercizio 2** sono tutti sufficienti: i valori di moda e mediana confermano l'esito complessivamente positivo; relativamente all'**esercizio 3**, un solo studente ha ottenuto punteggio non sufficiente, il valore della moda coincide con il punteggio massimo (totalizzato da quattro studenti). I risultati di questi due esercizi sono in linea con le aspettative che accompagnavano la progettazione della prova: gli esercizi sono semplici dal momento che richiedono la mera rievocazione di conoscenze o l'applicazione meccanica di procedure.

I risultati dell'**esercizio 1**, mediante il quale vengono verificati quasi tutti gli obiettivi di apprendimento dell'unità didattica svolta, hanno valor medio di poco superiore al sette, vicino alla media dei voti finali. Il valore della deviazione standard è relativamente contenuto; figurano due soli punteggi non sufficienti (entrambi superiori al cinque) mentre metà della classe ha ottenuto punteggi superiori al sette.

L'analisi degli indici statistici tradizionali consente di formulare le prime riflessioni rispetto alla struttura della prova di valutazione.

Senz'altro sono confermate le intenzioni e le aspettative di chi ha progettato e costruito la prova. Sono da valutare positivamente gli esiti degli esercizi 2 e 3; altrettanto positiva può essere la valutazione dei risultati dell'esercizio 1: la classe sa risolvere algebricamente e

graficamente una disequazione di secondo grado e questo è forse il risultato più auspicabile al termine dello svolgimento di un'unità didattica intitolata "Disequazioni di secondo grado: risoluzione algebrica e geometrica".

Per quanto riguarda gli esercizi 4, 5, 6, se è vero che gli esiti 'poco felici' erano preannunciati, questa consapevolezza non può essere ritenuta una giustificazione al fatto che la maggior parte degli studenti (la quasi totalità se si considerano i risultati dell'esercizio 4) non sia riuscita a svolgerli in modo sufficiente. La classe non è probabilmente abituata, quindi preparata, ad affrontare situazioni che richiedano il coinvolgimento di processi mentali complessi; proporre tali situazioni in una prova di verifica non può che produrre risultati negativi, che non possono e non devono essere considerati significativi nella valutazione del singolo studente. Gli obiettivi collocati sui gradini alti della tassonomia di Anderson & Krathwohl restano comunque da perseguire e gli esiti della prova dimostrano che c'è ancora molto lavoro da fare, antecedente però alla fase di valutazione.

Di seguito sono analizzati gli item (i sei esercizi), mediante il calcolo di indici utili per caratterizzarne la proprietà di discriminare gli allievi che possiedono determinate conoscenze e abilità da quelli che non le possiedono.

Indice di difficoltà

L'indice di difficoltà è dato dal rapporto fra il punteggio totale ottenuto da tutti gli studenti sull'item e il punteggio massimo ottenibile da tutti gli studenti sull'item:

$$ID = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n \cdot M}$$

dove P_i è il punteggio ottenuto dallo studente i -esimo sull'item, n è il numero di studenti che hanno svolto l'esercizio, M è il punteggio massimo ottenibile nell'item.

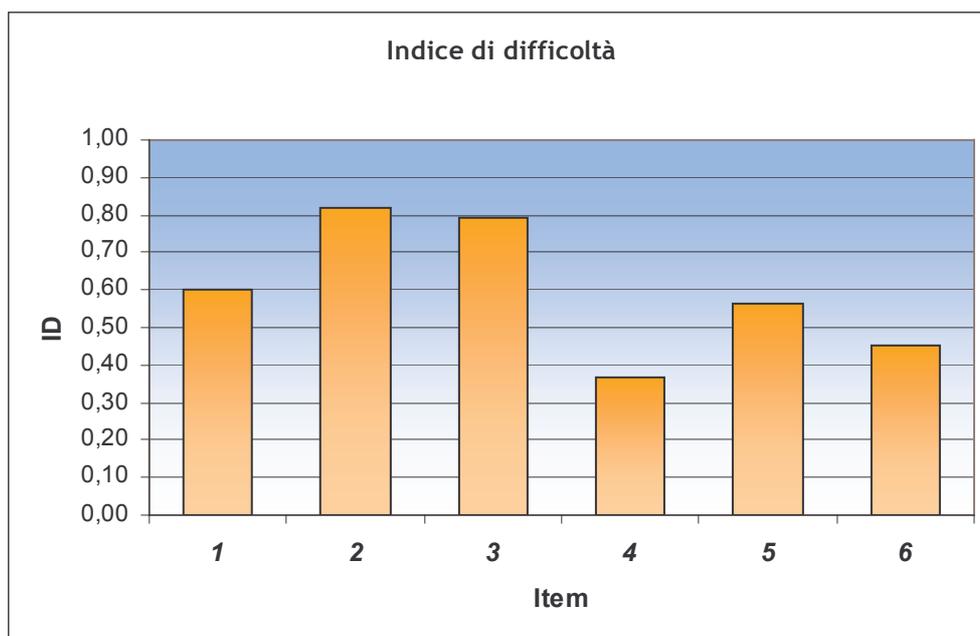
L'indice di difficoltà varia tra 0 e 1. Se $ID = 0$, l'item è troppo difficile: nessun allievo è riuscito a dare una risposta più o meno corretta; se $ID = 1$, l'item è troppo facile: tutti gli allievi hanno risposto correttamente.

Il prospetto accanto fornisce un'interpretazione del valore dell'indice rispetto all'item cui si riferisce.

<i>ID</i>	<i>Livello di difficoltà dell'item</i>
0.00 - 0.25	Item difficile
0.26 - 0.50	Item medio - difficile
0.51 - 0.75	Item medio - facile
0.76 - 1.00	Item facile

Di seguito sono riportati la tabella e il diagramma a barre relativi all'indice di difficoltà associato ad ogni item della prova in esame.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6
$\sum P_i$	93,50	48,00	62,00	48,00	55,00	82,00
$n \cdot M$	156,00	58,50	78,00	130,00	97,50	182,00
<i>ID</i>	0,60	0,82	0,79	0,37	0,56	0,45



In base ai criteri precedentemente illustrati, gli item 2 e 3 possono essere considerati facili; l'item 1 medio-facile; i restanti item 4, 5 e 6 si possono classificare come medio-difficili.

Potere discriminante

Il potere discriminante dell'item è dato dal prodotto tra il numero di risposte corrette date all'item (E) e il numero di risposte sbagliate (S), rapportato alla metà del numero totale di risposte (N) elevato al quadrato:

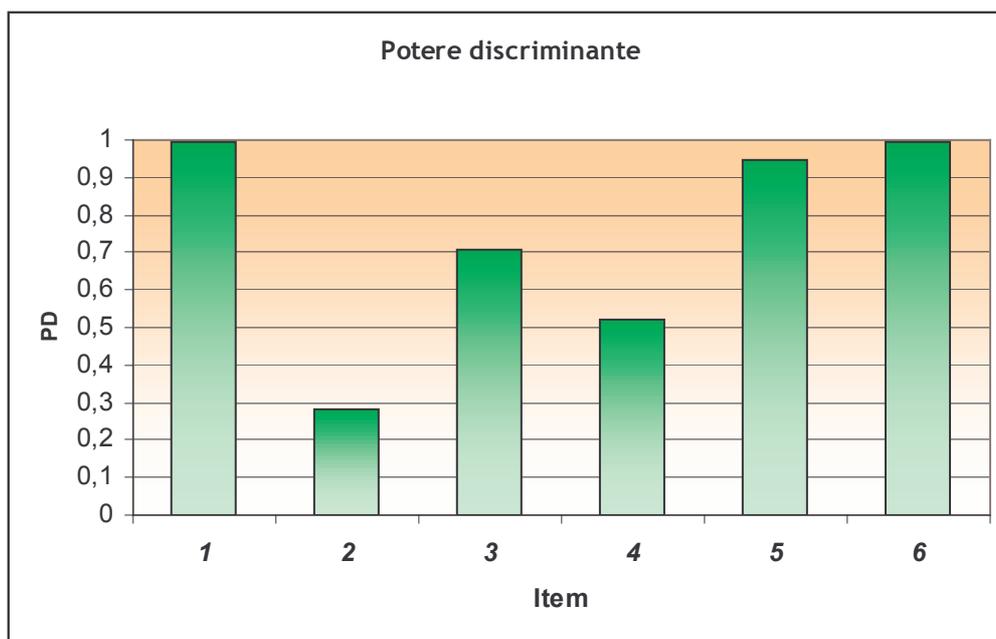
$$PD = \frac{E \cdot S}{(N/2)^2}$$

Il potere discriminante varia tra 0 e 1. Se tutti gli studenti hanno risposto in modo corretto o sbagliato all'item, allora il suo potere discriminante è nullo ($PD = 0$); se metà degli studenti ha risposto in modo corretto e metà ha risposto in modo sbagliato, allora il potere discriminante dell'item è massimo ($PD = 1$).

Per calcolare il potere discriminante degli item della prova in esame, è stata valutato corretto lo svolgimento che ha consentito di totalizzare un punteggio maggiore di 6.50 (considerando i punteggi espressi in decimi).

Di seguito sono riportati la tabella e il diagramma a barre relativi all'indice di difficoltà associato ad ogni item della prova in esame.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6
E	7	12	10	2	8	6
S	6	1	3	11	5	7
PD	0,99	0,28	0,71	0,52	0,95	0,99



Gli item 1, 5 e 6 risultano aver un altissimo potere discriminante (in tutti e tre i casi l'indice 'sfiora' il valore massimo); il potere discriminante assume un valore medio-alto per l'item 3 mentre l'item 4 ha potere discriminante medio. L'item 2 mostra invece un limitato potere discriminante: è stato svolto correttamente da quasi tutta la classe; del resto mediante questo esercizio si verifica il raggiungimento di obiettivi di sola conoscenza o applicazione di procedure.

Indice di selettività

L'indice di selettività di un item è dato dalla differenza tra il numero N_m di risposte esatte date all'item da parte degli studenti che hanno ottenuto i risultati migliori nell'intera prova e il numero N_p di risposte esatte date da parte degli studenti che hanno ottenuto i risultati peggiori, rapportata al numero totale degli studenti N , diviso 3.

$$IS = \frac{N_m - N_p}{N/3}$$

Convenzionalmente N_m equivale al terzo del totale degli allievi, corrispondente al terzo che hanno ottenuto il punteggio più alto, mentre N_p è il terzo del totale degli allievi, corrispondente al terzo che hanno ottenuto il punteggio più basso.

L'indice di selettività varia tra -1 e $+1$.

$IS = -1$ gli allievi che hanno ottenuto il miglior punteggio nella prova hanno risposto tutti in modo errato all'item mentre gli allievi che hanno ottenuto il peggior punteggio nella prova hanno risposto tutti in modo corretto all'item (selettività rovesciata).

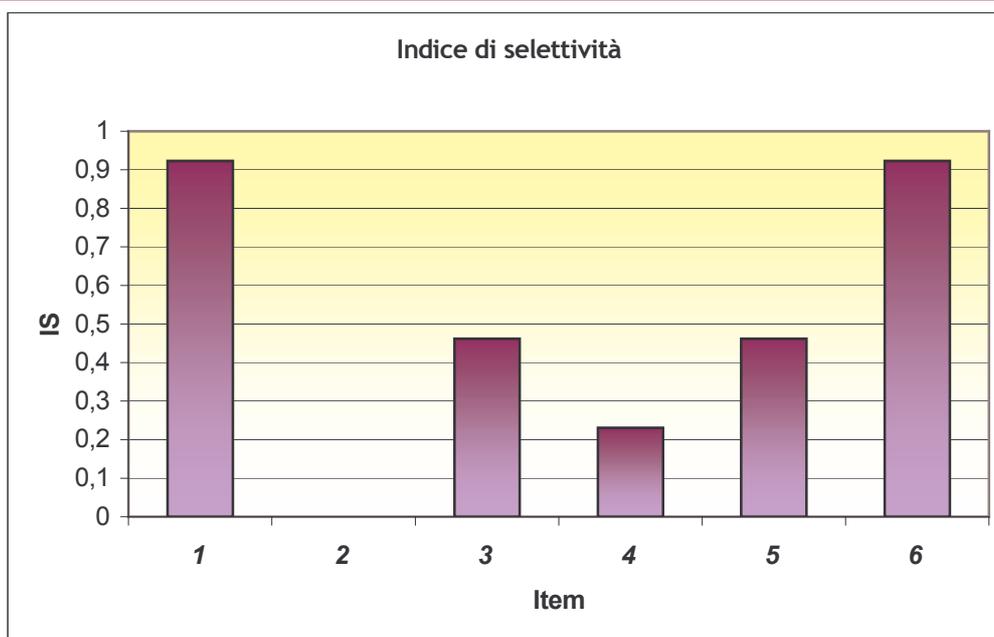
$IS = +1$ gli allievi che hanno ottenuto il miglior punteggio nella prova hanno risposto tutti in modo corretto all'item mentre gli allievi che hanno ottenuto il peggior punteggio nella prova hanno risposto tutti in modo errato all'item (massima selettività).

$IS = 0$ l'item non è selettivo: tanti studenti preparati quanti meno preparati hanno risposto in modo corretto.

Poiché gli studenti che hanno svolto la prova sono 13, si considerano i risultati dei primi quattro studenti che hanno ottenuto i risultati migliori e degli ultimi quattro studenti con i peggiori risultati.

Di seguito sono riportati la tabella e il diagramma a barre relativi all'indice di selettività associato ad ogni item della prova in esame.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6
N_m	4	4	4	1	4	4
N_p	0	4	2	0	2	0
IS	0,92	0	0,46	0,23	0,46	0,92



La prima osservazione riguarda l'assenza di item a selettività rovesciata. Gli item 1 e 6 sono quelli caratterizzati da un valore dell'indice di selettività quasi massimo: l'item 1 è quello che verifica il raggiungimento dei principali obiettivi di apprendimento dell'unità didattica svolta mentre l'item 6 è quello pensato per essere il più difficile; si può ipotizzare che gli studenti, meglio preparati rispetto all'argomento della verifica, siano stati anche quelli che meglio hanno saputo affrontare un esercizio non standard, che coinvolgeva processi mentali superiori. Gli item 3 e 5 si possono considerare mediamente selettivi mentre è poco selettivo l'item 4 (tra tutti il più difficile, in base al valore dell'indice di difficoltà corrispondente). Infine l'item 2, il più facile e il meno discriminante, è anche l'unico ad avere indice di selettività nullo.

Indice di affidabilità

L'indice di affidabilità è definito come il prodotto fra l'indice di difficoltà e l'indice di selettività: $IA = ID \times IS$

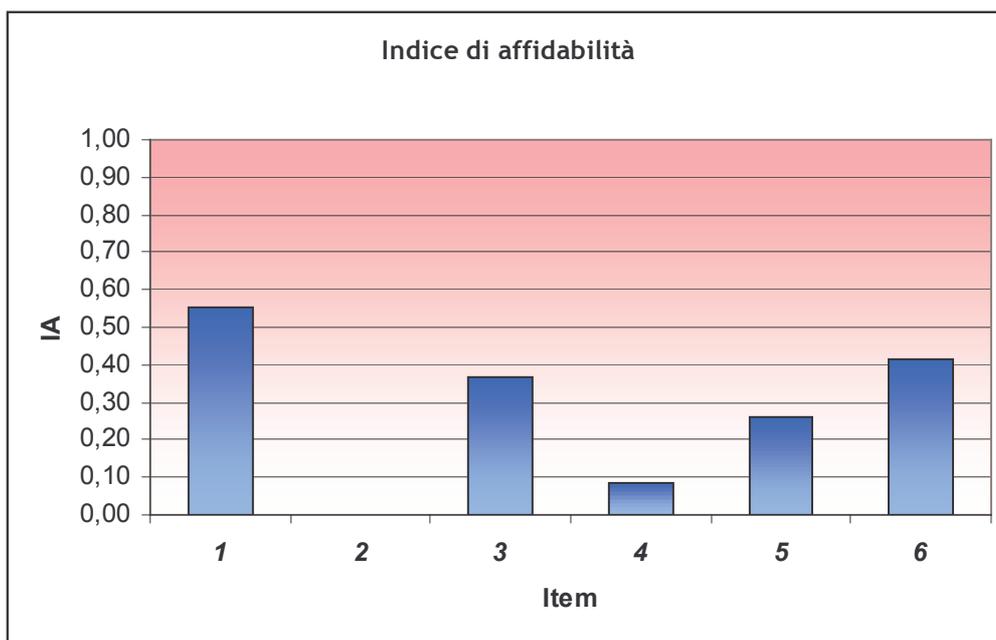
Per affidabilità dell'item si deve intendere la capacità di distinguere significativamente la prestazione degli studenti più preparati da quella dei meno preparati. Un item è considerato tanto più affidabile quanto più riesce a discriminare le prestazioni degli allievi senza essere eccessivamente difficile.

L'indice di affidabilità varia tra -1 e $+1$. Un valore negativo di tale indice è determinato da un indice di selettività negativo. Un valore prossimo a zero (item difficile o scarsamente

selettivo) è caratteristico di un item che non discrimina in modo netto gli studenti più preparati da quelli meno preparati; un valore prossimo a uno (item facile e altamente selettivo) è associato ad un item che discrimina chiaramente gli studenti più preparati da quelli meno preparati.

Di seguito sono riportati la tabella e il diagramma a barre relativi all'indice di affidabilità associato ad ogni item della prova in esame.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6
ID	0,60	0,82	0,79	0,37	0,56	0,45
IS	0,92	0	0,46	0,23	0,46	0,92
IA	0,55	0,00	0,37	0,09	0,26	0,42



Le osservazioni in merito ai valori ricavati sono le seguenti: non si registrano valori negativi dell'indice di affidabilità (non essendoci item a selettività rovesciata); l'item 1 è quello ad affidabilità più elevata; l'item 2 ha invece affidabilità nulla, dal momento che è nullo il corrispondente indice di selettività; è bassa anche l'affidabilità dell'item 4, in questo caso, però, anche a causa di un basso indice di difficoltà.

Riflessione sull'analisi degli item

Alla luce della precedente analisi relativa agli item, si possono aggiungere alcune considerazioni alle osservazioni fatte sulla base dei valori assunti dagli indici statistici tradizionali.

L'item 1 risulta senz'altro il migliore; è un item medio facile, con elevato potere discriminante, molto selettivo; il corrispondente indice di affidabilità assume il valore più alto. È già stata sottolineata l'importanza della bontà di questo item: tra tutti è quello che meglio consente di verificare il raggiungimento degli obiettivi di apprendimento associati all'argomento trattato.

L'item 2 ha basso potere discriminante, indici di selettività e di affidabilità entrambi nulli; del resto si tratta di un item facile che testa obiettivi di conoscenza e mera applicazione; per altro, essendo un item a stimolo e risposta chiusi (vero o falso), la probabilità di rispondere bene ma casualmente è molto alta, pari, per ogni quesito, al 50 per cento: non è possibile essere certi che le informazioni derivanti dalle risposte rispecchino di fatto le reali competenze possedute. Nella stesura di un'eventuale prova 'migliorata', l'item 2 potrebbe ugualmente essere inserito, magari aumentando, dove è possibile, il numero di alternative delle risposte (introducendone una terza VF), oppure chiedendo di argomentare sinteticamente le ragioni delle proprie scelte. Un item facile poco discriminante, poco selettivo e poco affidabile può comunque avere una sua utilità, non tanto ai fini della valutazione quanto rispetto alla possibilità in esso intrinseca di incoraggiare gli studenti più deboli, nel corso dello svolgimento della prova.

Anche l'item 4 risulta essere poco selettivo e scarsamente affidabile; tuttavia rispetto al precedente, è un item medio-difficile, il più difficile tra i sei che compongono la prova. In questo caso, è da valutare più a fondo l'ipotesi di inserire l'item in una nuova prova. Senz'altro, come già precedentemente accennato, un item di questo tipo è giustificato soltanto al termine di un percorso di apprendimento che abbia messo in gioco anche processi mentali più complessi, che abbia abituato gli allievi ai cambiamenti di prospettiva e ai ragionamenti inversi; si rischia altrimenti di creare disappunto anche negli studenti migliori, come del resto è avvenuto.

Gli item 3, 5 e 6 non 'escono male' dall'analisi degli indici specifici. L'item 6, medio-difficile, ha potere discriminante elevato, è selettivo e mediamente affidabile; considerazioni analoghe valgono per l'item 5, che risulta però meno affidabile; l'item 3, facile, ha potere discriminante medio-alto e medio indice di selettività: essendo un item a completamento, relativo alla conoscenza della definizione di parabola, la discriminazione è tra chi studia e chi non studia oppure tra chi ricorda e chi invece dimentica.

Alcuni esercizi sono a loro volta composti da item tra loro indipendenti. Di seguito è riportata l'analisi specifica relativa agli esercizi 2 e 4. Venendo meno il confronto diretto con gli altri esercizi, poco si aggiunge all'analisi complessiva della prova. Tuttavia dal momento che la bontà degli esercizi 2 e 4 è piuttosto discutibile, l'analisi è utile per indagare dove sia possibile migliorare la formulazione degli item o modificarne le richieste in modo da ottenere un guadagno in termini di affidabilità.

Analisi dell'esercizio 2

Alunni	Item									Punteggio totale su 4,5
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	
A1	0,5	0,5	0,5	0,0	0,0	0,5	0,5	0,5	0,0	3,0
A2	0,5	0,5	0,5	0,5	0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	4,0
A3	0,5	0,0	0,0	0,5	0,0	0,5	0,5	0,5	0,0	2,5
A4	0,5	0,5	0,5	0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4,0
A5	0,5	0,5	0,5	0,0	0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	3,5
A6	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4,5
A7	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4,5
A8	0,5	0,5	0,0	0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	3,5
A9	0,5	0,5	0,5	0,0	0,0	0,5	0,0	0,5	0,5	3,0
A10	0,5	0,5	0,5	0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4,0
A11	0,5	0,5	0,5	0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4,0
A12	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,0	0,0	0,5	3,5
A13	0,5	0,5	0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4,0
Punteggio min	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Punteggio max	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4,5
Media	0,5	0,5	0,4	0,2	0,3	0,5	0,4	0,5	0,4	3,7
Dev. Standard	0,00	0,14	0,22	0,26	0,25	0,00	0,19	0,14	0,19	0,6
Moda	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4,0
Mediana										4,0

✓ **Indice di difficoltà**

	Item								
	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\sum P_i$	6,5	6,0	5,0	3,0	4,0	6,5	5,5	6,0	5,5
$n \cdot M$	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5
ID	1,00	0,92	0,77	0,46	0,62	1,00	0,85	0,92	0,85

✓ **Potere discriminante**

E	13	12	11	7	9	13	11	13	11
S	0	1	3	6	4	0	2	1	2
PD	0,00	0,28	0,78	0,99	0,85	0,00	0,52	0,31	0,52

✓ **Indice di selettività**

N_m	4	4	4	2	4	4	4	4	4
N_p	4	4	3	2	1	4	2	3	2
IS	0,00	0,00	0,23	0,00	0,69	0,00	0,46	0,23	0,46

✓ **Indice di affidabilità**

IA	0,00	0,00	0,18	0,00	0,43	0,00	0,39	0,21	0,39
-----------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

Analisi dell'esercizio 4

Alunni	Item					Punteggio totale su 10
	a	b	c	d	e	
A1	2,0	2,0	0,0	0,0	0,0	4,0
A2	2,0	0,0	0,0	2,0	0,0	4,0
A3	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	2,0
A4	0,0	0,0	2,0	2,0	0,0	4,0
A5	2,0	0,0	0,0	2,0	0,0	4,0
A6	2,0	0,0	2,0	2,0	2,0	8,0
A7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
A8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
A9	2,0	0,0	0,0	2,0	0,0	4,0
A10	2,0	0,0	0,0	2,0	0,0	4,0
A11	2,0	2,0	2,0	2,0	0,0	8,0
A12	0,0	2,0	0,0	2,0	0,0	4,0
A13	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	2,0
Punteggio min						
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Punteggio max						
	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	10,0
Media						
	1,1	0,5	0,5	1,5	0,2	3,7
Dev. Standard						
	1,04	0,88	0,88	0,88	0,55	2,4
Moda						
	2	0	0	2	0	4,0
Mediana						
						4,0

✓ Indice di difficoltà

	Item				
	a	b	c	d	e
$\sum P_i$	14,0	6,0	6,0	20,0	2,0
$n \cdot M$	26	26	26	26	26
ID	0,54	0,23	0,23	0,77	0,08

✓ Potere discriminante

E	7	3	3	10	1
S	6	10	10	3	12
PD	0,99	0,71	0,71	0,71	0,28

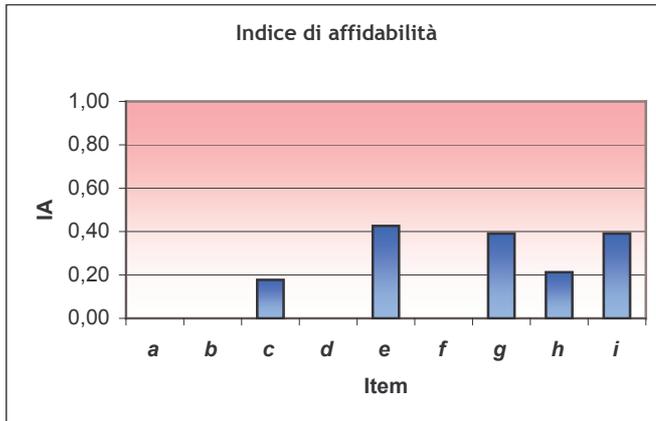
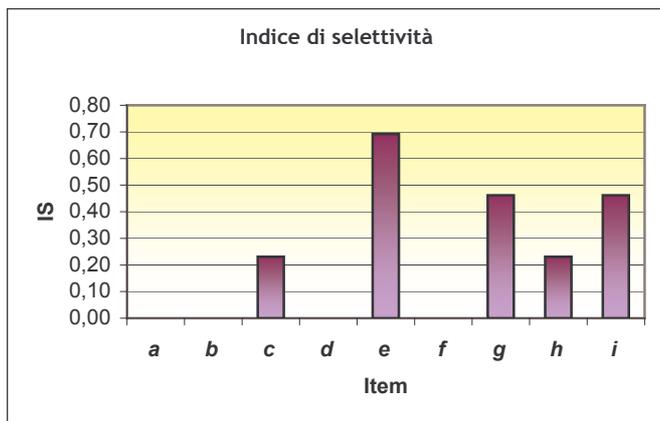
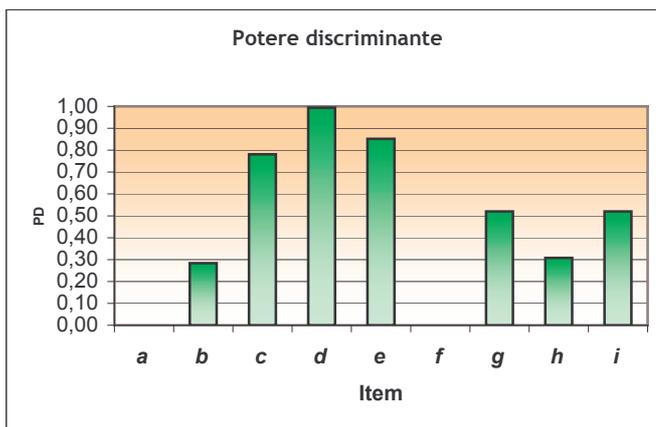
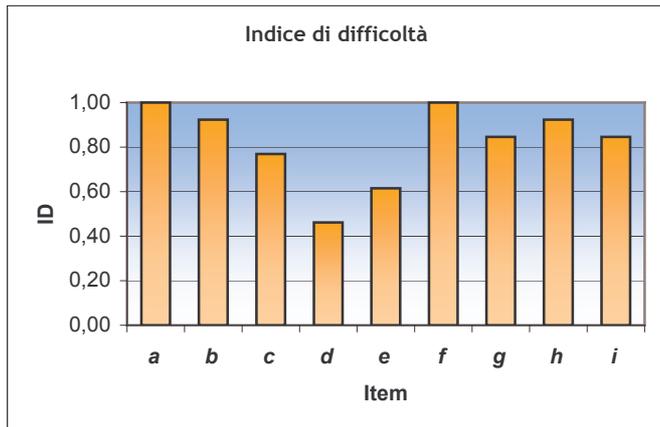
✓ Indice di selettività

N_m	3	1	3	4	1
N_p	0	0	0	2	0
IS	0,69	0,23	0,69	0,46	0,23

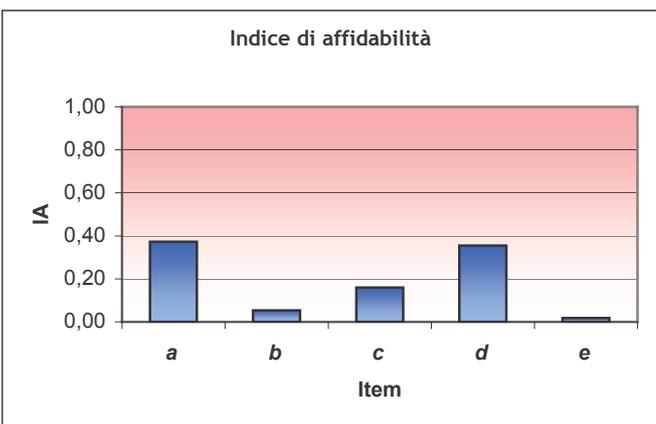
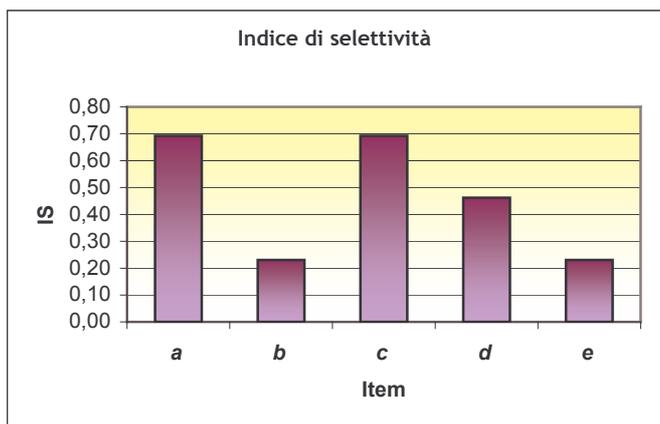
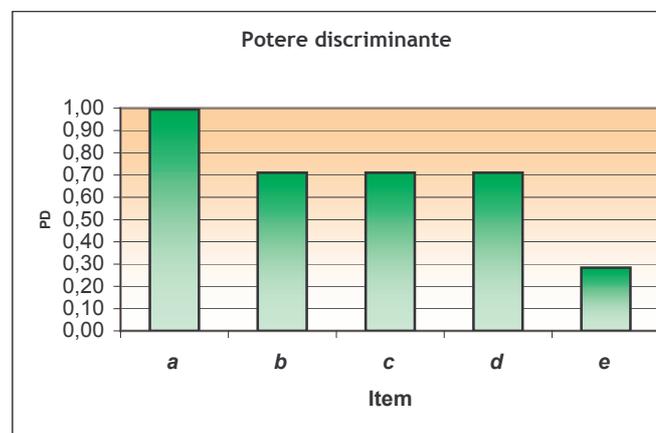
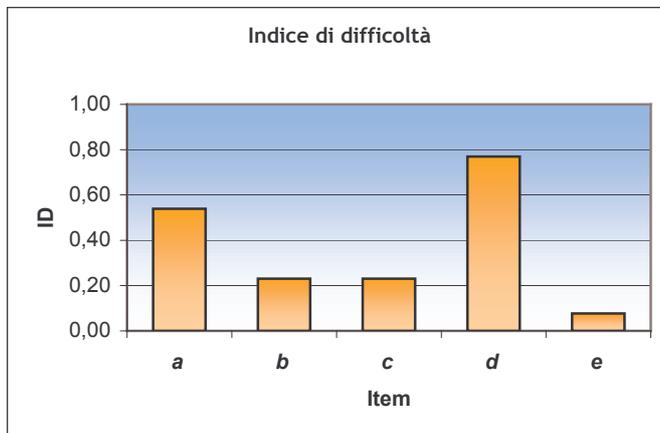
✓ Indice di affidabilità

IA	0,37	0,05	0,16	0,36	0,02
-----------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

Diagrammi a barre relativi agli indici associati all'esercizio 2



Diagrammi a barre relativi agli indici associati all'esercizio 4



Riflessione sull'analisi degli item che compongono gli esercizi 2 e 4

L'**esercizio 2** ha basso potere discriminante, indici di selettività e di affidabilità entrambi nulli. L'analisi dei singoli item rivela come tra tutti soltanto l'item e presenti delle buone proprietà: è mediamente facile, ha un buon potere discriminante ed è selettivo. Ben tre item, invece, hanno indice di affidabilità nullo: a due di questi (gli item a e f) sono associati valori nulli sia per il potere discriminante sia per la selettività; l'item d, pur non essendo selettivo, ha potere discriminante elevato (quasi massimo).

Il migliore	(e) La disequazione $-4x^2 - 4 \geq 0$ non ammette soluzione
I peggiori	(a) La disequazione $x^2 + 6x + 5 > 0$ non ammette soluzione (f) La disequazione $x^2 - 4x + 2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$

La riflessione che sorge spontanea confrontando l'item 'migliore' con i 'peggiori' è che questi ultimi prevedono la mera applicazione di un tecnicismo (il calcolo del discriminante) mentre nel caso dell'item e la risposta può non necessariamente passare attraverso l'applicazione della regola classica: è sufficiente riconoscere che, essendo il quadrato di qualunque numero sempre positivo, la quantità $-4x^2 - 4$ è negativa, comunque si scelga x. L'item migliore dunque è anche quello che può mettere in gioco abilità più complesse, di comprensione e interpretazione.

L'**esercizio 4** risulta poco selettivo e scarsamente affidabile; tuttavia rispetto al precedente, è un esercizio medio-difficile. L'analisi degli item che lo compongono mostra infatti che tre dei cinque item sono difficili; di questi, l'item e risulta il meno affidabile, essendo anche scarsamente selettivo; l'item c, invece, è mediamente selettivo e con un buon potere discriminante. L'analisi produce una valutazione positiva per l'item a (il più affidabile); si tratta di un quesito medio-facile con potere discriminante quasi massimo e una buona capacità selettiva.

Il migliore	a) $\forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione di $x^2 \dots\dots\dots 25 > 0$
Il peggiore	e) $x \leq 4 \vee x \geq 6$ è soluzione di $x^2 - \dots x \dots\dots \geq 0$

L'item 'peggiore' è stato svolto correttamente soltanto da un alunno; si tratta di un quesito che mette in gioco abilità complesse (creare/generare); per valutare positivamente obiettivi di questo tipo occorre che la padronanza degli argomenti sia buona. Ciò non significa svolgere a lezione un buon numero di esercizi simili per poi proporre una variante in una successiva prova di verifica: allora, infatti, per gli alunni si tratterebbe soltanto più di ricordare e applicare. Più utile invece sarebbe un lavoro di costruzione dei significati: risultati come quelli ottenuti nell'esercizio 4 mostrano che è ancora lontana la conoscenza dei perché.

L'indice di correlazione

L'indice di correlazione fra due item varia fra -1 e 1. Vale -1 quando tutti gli alunni che hanno avuto un punteggio alto per il primo item, hanno avuto un punteggio basso per il secondo; vale +1 quando tutti quelli che hanno avuto un punteggio alto per il primo item hanno avuto un punteggio alto anche per il secondo. Questo indice dà un'idea della coerenza che c'è fra item che dovrebbero rilevare le stesse abilità.

Nelle tabelle seguenti sono riportati gli indici di correlazione relativi agli item rispettivamente dell'esercizio 2 e dell'esercizio 4 (il calcolo non è stato fatto per gli item i cui punteggi hanno deviazione standard nulla).

Correlazione fra gli item dell'esercizio 2:

	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>
<i>b</i>	1,00	0,53	-0,31	0,37	-0,12	-0,08	0,68
<i>c</i>	0,53	1,00	-0,23	-0,06	-0,23	-0,16	0,27
<i>d</i>	-0,31	-0,23	1,00	0,10	-0,03	-0,31	-0,03
<i>e</i>	0,37	-0,06	0,10	1,00	0,10	-0,23	0,54
<i>g</i>	-0,12	-0,23	-0,03	0,10	1,00	0,68	-0,18
<i>h</i>	-0,08	-0,16	-0,31	-0,23	0,68	1,00	-0,12
<i>i</i>	0,68	0,27	-0,03	0,54	-0,18	-0,12	1,00

Correlazione fra gli item dell'esercizio 4:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	1,00	0,14	0,14	0,23	0,27
<i>b</i>	0,14	1,00	0,13	-0,13	-0,16
<i>c</i>	0,14	0,13	1,00	0,30	0,53
<i>d</i>	0,23	-0,13	0,30	1,00	0,16
<i>e</i>	0,27	-0,16	0,53	0,16	1,00

Sono pochi i valori superiori a 0.50: soltanto 4 su 31 confronti. Del resto anche il calcolo dei precedenti indici ha evidenziato delle differenze notevoli tra i risultati ottenuti dagli alunni, a seconda del quesito affrontato.

9. INDICAZIONI PER IL RECUPERO DEGLI ALLIEVI E PER LA PROGRAMMAZIONE SUCCESSIVA

Indicazioni per il recupero degli allievi che non hanno raggiunto gli obiettivi e indicazioni generali per la programmazione successiva, sulla base dei risultati ottenuti nella prova.

La correzione

Il primo passo da fare per chiarire agli studenti quali fossero i procedimenti corretti da seguire nella prova di verifica è svolgere un'attenta correzione alla lavagna.

Può essere utile, per esempio, chiamare a svolgere gli esercizi proprio gli studenti che hanno manifestato qualche difficoltà significativa per tutta la classe, o perché l'errore si è ripetuto in molti casi, o perché l'errore fatto ben si presta a fare da stimolo alla discussione sulla tematica oggetto dell'esercizio.

Una correzione alla lavagna svolta attraverso la discussione, docente – studente con difficoltà - resto della classe, si rivela particolarmente utile a tutti gli attori della discussione: agli studenti con difficoltà, perché (e non è poco), chiamati alla lavagna, mantengono un più alto livello di attenzione, almeno nel momento in cui si trovano di fronte al docente; poi perché il fatto che l'errore venga corretto attraverso la discussione con il docente e con i compagni, e quindi attraverso piccoli passaggi gradualmente, favorisce la comprensione delle dinamiche che hanno causato l'errore e di conseguenza rafforza l'apprendimento delle procedure corrette.

Per gli studenti che, al contrario, hanno risposto correttamente, la discussione degli errori fatti dai compagni può rafforzare la comprensione di un concetto già appreso ma può anche chiarire eventuali dubbi che la verifica non ha messo in evidenza.

Infine per il docente questa dinamica di correzione degli errori permette di intervenire in modo diretto sul problema del singolo studente, facendo della difficoltà del singolo un'opportunità di crescita per tutta la classe.

In questa ottica, la correzione dei quesiti a risposta multipla ha il significato di evidenziare la risposta corretta, ma anche di fare emergere perché lo sia e, attraverso dei contro esempi, perché invece siano da escludere le altre alternative.

Il recupero

La correzione in classe è il primo degli interventi di recupero che è possibile proporre.

In seguito si può intervenire proponendo delle attività che coinvolgano i nodi concettuali per i quali gli errori sono stati più frequenti.

Nella **Tabella 1** i risultati della verifica sono stati rappresentati come la frazione di punteggio ottenuta dai singoli studenti in ogni esercizio; si nota come i valori più bassi e cioè le più basse percentuali di successo (inferiori al 50% evidenziati in rosso,), si trovino nell'esercizio 4, nell'esercizio 6 e nell'esercizio 1. Un risultato in percentuale inferiore al 50% corrisponde ad un'insufficienza grave nel raggiungimento degli obiettivi relativi al quesito. Un risultato inferiore a due terzi del punteggio totale (circa 67%) può comunque essere

considerato un parziale insuccesso (nella tabella tali valori sono evidenziati in verde); solo se ha ottenuto oltre due terzi del punteggio possiamo ritenere che lo studente abbia raggiunto pienamente l'obiettivo preposto.

Tabella 1: Frazione di punteggio ottenuta dagli alunni nei singoli esercizi della prova (punteggio ottenuto / punteggio totale)

Esercizio	1	2	3	4	5	6
Punti totali	12	4,5	6	10	7,5	14
Alunno 1	0,63	0,67	0,75	0,40	0,53	0,57
Alunno 2	0,71	0,89	0,50	0,40	0,40	0,68
Alunno 3	0,46	0,56	0,33	0,20	0,53	0,29
Alunno 4	0,75	0,89	1,00	0,40	0,93	0,96
Alunno 5	0,67	0,78	1,00	0,40	0,87	0,71
Alunno 6	0,83	1,00	0,83	0,80	0,67	0,29
Alunno 7	0,46	1,11	0,83	0,00	0,47	0,25
Alunno 8	0,50	0,78	0,75	0,00	0,67	0,14
Alunno 9	0,38	0,67	0,92	0,40	0,33	0,36
Alunno 10	0,71	0,89	1,00	0,40	0,93	0,61
Alunno 11	0,92	0,89	1,00	0,80	1,00	0,86
Alunno 12	0,33	0,78	0,50	0,40	0,00	0,00
Alunno 13	0,46	0,89	0,83	0,20	0,00	0,14

L'intervento di recupero dovrà rivolgersi particolarmente a coloro che hanno manifestato difficoltà nel quesito 1, che richiedeva di mettere in gioco i processi più semplici della tassonomia di Anderson & Krathwohl (applicare e eseguire). A tale quesito, infatti, il 40% degli studenti ha risposto in modo gravemente insufficiente e inoltre due alunni hanno raggiunto meno di due terzi del punteggio totale (cfr. **Tabella 2**).

Tabella 2: Percentuali di successo nell'esercizio 1 e identificazione degli alunni da recuperare

Alunno	Percentuale di successo	
Alunno 1	63%	parzialmente da recuperare
Alunno 2	71%	
Alunno 3	46%	da recuperare totalmente
Alunno 4	75%	
Alunno 5	67%	
Alunno 6	83%	
Alunno 7	46%	da recuperare totalmente
Alunno 8	50%	parzialmente da recuperare
Alunno 9	38%	da recuperare totalmente
Alunno 10	71%	
Alunno 11	92%	
Alunno 12	33%	da recuperare totalmente

Alunno 13	46%	da recuperare totalmente
-----------	-----	--------------------------

Poiché, in totale, circa metà degli studenti non ha raggiunto in modo pienamente sufficiente gli obiettivi dell'esercizio 1, una buona proposta di recupero potrebbe essere una scheda di lavoro (cfr. "Scheda di lavoro" n.1) da proporre alla classe, dove ai ragazzi sia richiesto di lavorare a coppie e dove ogni coppia, su indicazione del docente, sia formata da uno studente non sufficiente e da uno sufficiente rispetto agli obiettivi perseguiti dal quesito numero 1 (si veda la **Tabella 3**).

Il lavoro a coppie rende lo svolgimento degli esercizi un'attività meno monotona; il meccanismo del "tutoring" sarà un vantaggio sia per lo studente "tutor", che avrà modo di consolidare le proprie conoscenze, sia per lo studente con difficoltà, che sarà favorito dal linguaggio accessibile usato dal compagno e dalla maggiore attenzione riservata.

Tabella 3: formazione delle coppie per l'attività di recupero con la scheda 1

Alunno	Coppia
Alunno 1	F
Alunno 2	F
Alunno 3	E
Alunno 4	D
Alunno 5	E
Alunno 6	B
Alunno 7	D
Alunno 8	F
Alunno 9	B
Alunno 10	C
Alunno 11	A
Alunno 12	A
Alunno 13	C

“Scheda di lavoro” n.1

SOLUZIONE ALGEBRICA DELLE DISEQUAZIONI

1. Che cos'è una disequazione?

.....

2. Tra le seguenti espressioni algebriche sottolinea le disequazioni di secondo grado:

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

3. Ora ripassa il metodo di risoluzione delle equazioni di secondo grado e completa gli spazi vuoti.

Risolvere un'equazione di secondo grado significa trovare quei particolari dell'..... x che annullano il valore dell'espressione algebrica a membro. In generale, data un'equazione del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, le soluzioni si determinano come segue:

- calcolo del : $\Delta =$
-
- $\Delta = 0$ due soluzioni reali
- se $\Delta > 0$ due soluzioni reali
- $\Delta < 0$
- nel caso in cui le soluzioni esistano, si ha che: $x_{1,2} =$

4. Ora risolvi algebricamente le seguenti equazioni di secondo grado:

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

5. Aiutandoti con gli appunti relativi alla soluzione grafica delle disequazioni di secondo grado, risolvi graficamente le equazioni del punto 4.

6. Ora osserva le seguenti disequazioni:

$$x^2 + 4x + 4 > 0$$

$$x^2 + 4x - 5 < 0$$

$$3x^2 + 2x + 1 \leq 0$$

Come puoi vedere, al punto 4 e 5 hai risolto algebricamente e graficamente le equazioni associate alle tre disequazioni date. Colora nei grafici al punto 4 i rami di parabola che hanno l'ordinata y che soddisfa alle condizioni delle disequazioni date.

- Le disequazioni date hanno tutte un insieme di soluzioni? Giustifica la tua risposta.

.....

- A quali intervalli sull'asse delle ascisse corrispondono i rami di parabola che hai colorato?

Durante l'attività a coppie il docente si preoccupa di controllare che tutti gruppi lavorino e di rispondere alle eventuali domande, evitando però di esplicitare in modo troppo diretto la soluzione dei quesiti; piuttosto, l'insegnante deve inviare gli studenti a consultare il libro di testo, gli appunti personali e il materiale didattico messo a disposizione durante lo svolgimento dell'unità didattica. In questo modo gli studenti sono stimolati ad acquisire indipendenza ed autonomia nella gestione e nella consultazione del materiale didattico.

Il lavoro proposto nella scheda 1 richiede un tempo di circa 30 minuti e può essere seguito da una serie di esercizi standard analoghi a quello proposto al punto 1 della prova di valutazione e che si trovano comunemente nel libro di testo. Tali esercizi possono essere svolti alla lavagna al termine della discussione della scheda di lavoro anche essere lasciati come compito a casa.

Per l'esercizio 4 invece, dove hanno gravi lacune anche gli studenti che sono stati ampiamente sufficienti negli altri quesiti, un'attività di questo tipo risulterebbe poco proficua. E' da sottolineare che l'esercizio 4 richiedeva di mettere in gioco processi complessi, come il ricordare, creare, rievocare e generalizzare.

Vista la tipologia dell'esercizio, l'intervento di recupero potrebbe essere svolto in laboratorio informatico utilizzando le potenzialità di un software matematico opportuno (come TI-Nspire CAS o Derive), nel quale l'accostamento tra il linguaggio algebrico e quello analitico - geometrico favorisce l'apprendimento dei significati piuttosto che l'apprendimento meccanico e puramente mnemonico (cfr. "Scheda di lavoro" n. 2).

Osservazioni relative alla scheda 2: l'attività proposta in questa scheda ha per obiettivo l'esplorazione del significato geometrico - analitico di un'espressione algebrica. In particolare si riferisce ad un'equazione di secondo grado e alla funzione parabola.

L'attività è molto stimolante per lo studente, che si "diverte" a giocare con i coefficienti dei tre termini della funzione assegnata e ne esplora le conseguenze per tentativi più o meno guidati dalla traccia di lavoro.

Il raccordo con la soluzione delle disequazioni di secondo grado è in parte solo implicito, perché non viene richiesto di risolvere delle disequazioni o darne l'insieme di soluzioni. Il collegamento con il problema delle disequazioni avverrà in un passo successivo, con la discussione collettiva dei risultati ottenuti dagli studenti durante lo svolgimento dell'attività didattica.

Tale tipologia di recupero permette, inoltre, di toccare alcuni nodi concettuali che sono oggetto anche dell'esercizio 6 e che molti studenti non hanno saputo affrontare in modo corretto.

Infine, durante lo svolgimento delle attività di recupero, il docente dovrà dedicare molta attenzione agli alunni 3, 12 e 13, che hanno mostrato di avere un maggior numero di lacune e per i quali sarà importante verificare il livello raggiunto al termine dell'intervento di recupero, prima di proseguire con la programmazione successiva.

“Scheda di lavoro” n.2

PARABOLE E DISEQUAZIONI

Utilizzando il software Geogebra disegna la parabola:

$$y = x^2 + 2x - 3$$

Rispondi:

- per quali valori dell'incognita x essa interseca l'asse delle ascisse?
.....
- per quali valori dell'incognita x il valore dell'ordinata y è positivo?
.....
- per quali valori dell'incognita x il valore dell'ordinata y è negativo?
.....

Cosa succede se annulliamo il termine noto dell'equazione? Descrivi la parabola ottenuta.

.....
.....

Poni il coefficiente di x uguale a 7 e descrivi la parabola ottenuta; prova a fare lo stesso lavoro ponendo tale coefficiente uguale a -1.

.....
.....

Ora modifica il coefficiente di x in modo da individuare una parabola che non interseca l'asse delle ascisse. Descrivi i tentativi effettuati e come sei arrivato alla soluzione.

.....
.....
.....
.....

Cosa succede se elimini il termine di primo grado?

.....
.....

Cosa succede se lasci soltanto il termine di secondo grado? Riesci ad ottenere una parabola che abbia sia punti di ordinata positiva che punti di ordinata negativa?

.....
.....
.....

Sulla base delle osservazioni fatte, descrivi, senza disegnarla, la parabola individuata dall'equazione $y = -x^2 + 3x + 1$, precisando:

- a) se è concava verso l'alto o verso il basso;
- b) se incontra l'asse x e, in caso affermativo, in quanti punti;
- c) se presenta punti di ordinata negativa;
- d) se presenta punti di ordinata positiva.

Poi prova a disegnare la parabola data utilizzando il software e verifica la correttezza delle tue ipotesi.

La programmazione successiva

La programmazione successiva prevede l'argomento delle disequazioni fratte e dei sistemi di disequazioni. Poiché il nuovo argomento è strettamente legato al precedente, sarà importante verificare che tutti gli studenti abbiano recuperato la maggior parte delle lacune prima di introdurre i nuovi concetti.

Nella trattazione dei nuovi argomenti, sulla base anche dei risultati della prova ora analizzata, si dovrà procedere lentamente e con continui richiami ai concetti già affrontati in precedenza, in modo che gli studenti non costruiscano le nuove conoscenze in modo slegato da quelle precedenti.

Inoltre bisognerà puntare sulla costruzione delle abilità legate ai livelli tassonomici più elevati del semplice applicare ed eseguire: molti studenti hanno rivelato gravi lacune a questo proposito e quindi sarà compito del docente proporre attività che allenino gli studenti ad affrontare compiti più elevati. Le modalità possono essere diverse: il "tutoring", già usato nel corso delle attività di recupero; il "cooperative learning", che abitua gli studenti a lavorare in gruppo, ad aiutarsi a vicenda e, in particolare, a mettere in gioco le proprie abilità e non solo le proprie conoscenze.

Infine, poiché l'argomento si presta all'applicazione a situazioni problematiche della realtà, sarà opportuno che il docente sottoponga spesso agli studenti tali problemi, allenandoli al "problem solving".

10. CONCLUSIONE E RIFLESSIONE FINALE

Autoriflessione sull'esperienza: cosa si è imparato dall'esperienza della costruzione, della somministrazione e dell'analisi dei dati della prova stessa; cosa si rifarebbe allo stesso modo; cosa si farebbe in modo diverso se si potesse ripercorrere il percorso compiuto.

La preparazione di una prova sommativa da somministrare al termine di un percorso di tirocinio ha richiesto un notevole lavoro di sintesi, svolto in collaborazione col "tutor"; infatti è stato necessario trovare una mediazione tra lo stile di insegnamento del docente titolare del corso, più legato alla tradizione di spiegazione – esempi – esercizi applicativi – verifica, e lo stile proposto dal tirocinante, fondato sull'apprendimento per scoperta. Questo lavoro di mediazione ha messo in evidenza come, nella preparazione di una prova di valutazione, sia indispensabile tener conto in modo rigoroso del percorso di apprendimento seguito dagli allievi.

In fase di elaborazione del testo della prova si è rivelato molto utile provare a svolgere la verifica "mettendosi nei panni dello studente": questo ha evidenziato nella prima stesura omissioni e problematiche che si è cercato di correggere con la versione definitiva.

L'analisi effettuata in questa relazione ha messo in luce le potenzialità di una buona prova di verifica, non solo come strumento di valutazione degli allievi ma anche (e soprattutto) come strumento di indagine sul proprio lavoro di docente, sul percorso di apprendimento

proposto e sulle azioni di recupero necessarie. L'abitudine a fare questo tipo di analisi fornisce idee e proposte di miglioramento che, nel tempo, possono rendere il docente maggiormente qualificato e pronto ad intervenire in modo efficace sulle necessità della classe.

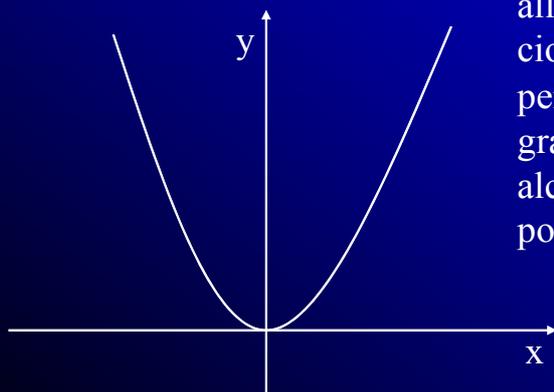
Un'osservazione in particolare va fatta relativamente all'esercizio 4, il cui esito disastroso ci ha fatto riflettere sul percorso di apprendimento e su come avremmo dovuto modificarlo per ottenere risultati migliori. Molto probabilmente gli studenti non erano ancora in grado di rielaborare i contenuti ad un livello di processo così elevato; avendo a disposizione più ore, sarebbe stato opportuno lavorare maggiormente su questo punto, per esempio con qualche ora di laboratorio in cui, partendo da esempi singoli, si arrivasse a generalizzare e classificare le disequazioni. Probabilmente, potendo tornare indietro, questo esercizio dovrebbe essere proposto in modo semplificato, magari inserendo nei primi punti qualche suggerimento alla soluzione o qualche domanda che stimoli la riflessione.

ALLEGATI

Allegato 1:

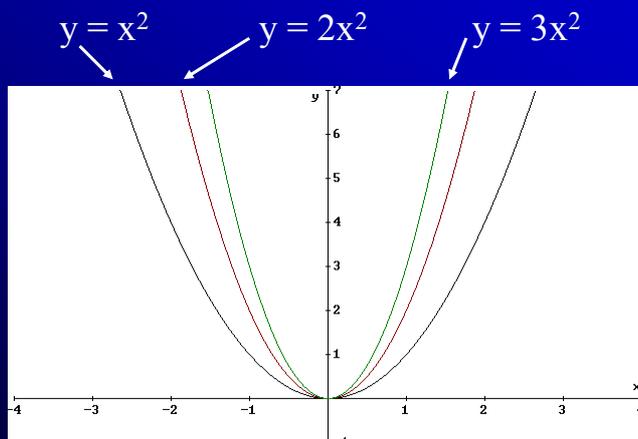
La curva di equazione $y = ax^2$

Tracciamo il grafico della curva associata all'equazione di II grado $y = x^2$



Essa è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, cioè $f(x)=f(-x)$ per cui per costruire il grafico basta determinare alcuni suoi punti di ascissa positiva

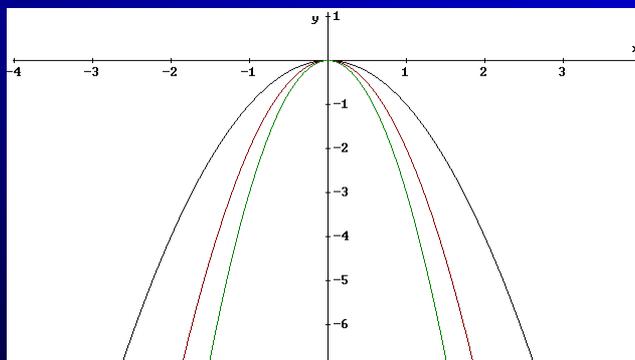
Consideriamo ora alcune curve del tipo $y = ax^2$ con $a > 0$



Esaminando le curve possiamo trarre alcune conclusioni

- ognuna ha come asse di simmetria l'asse y
- tutte passano per l'origine degli assi, che è il punto di ordinata minore
- tutte volgono la concavità verso l'alto, hanno la stessa forma e l'apertura diminuisce all'aumentare di a

Consideriamo ora le stesse curve con $a < 0$



$y = -x^2$

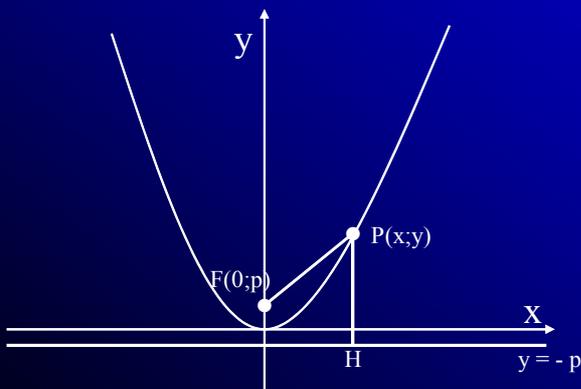
$y = -2x^2$

$y = -3x^2$

I grafici risultano simmetrici dei precedenti rispetto all'asse delle x

$y=ax^2$ come luogo geometrico

Possiamo definire la curva come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F (detto fuoco) e da una retta detta direttrice.



$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \\ \overline{PH} = |y+p| \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|$$

sviluppando e riducendo si ottiene: $y = \frac{1}{4p}x^2 = ax^2$

V(0;0) F(0; 1/4a) direttrice $y = -1/4a$ asse $x=0$

Riassumendo:

una funzione del tipo $y = ax^2$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ha come diagramma una curva che chiamiamo parabola, la quale ha:

- vertice nell'origine degli assi del sistema di riferimento,
- asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate,
- concavità rivolta verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$

Vogliamo ora determinare l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y e vertice nel punto $V(x_0, y_0)$.

Consideriamo una parabola del tipo $y = ax^2$ e la sottoponiamo ad una traslazione del vettore $\vec{v} = (x_0; y_0)$

$$y = ax^2 \xrightarrow[\begin{matrix} x \rightarrow x - x_0 \\ y \rightarrow y - y_0 \end{matrix}]{\tau(x_0; y_0)} y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

eq. di γ_0 *eq. di γ*

Come si vede l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice in $V(x_0; y_0)$ è

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

↓

$$y = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 + y_0$$

(b)
(c)

si ottiene: $y = ax^2 + bx + c$

Dalla $-2ax_0 = b$ ricaviamo che $x_0 = -\frac{b}{2a}$

e quindi, essendo $y_0 = f(x_0)$, si ottiene

$$y_0 = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Concludendo la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ ha per vertice il punto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

Allegato 2:

parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$	$\Delta = b^2 - 4ac$	asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$	vertice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	fuoco $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	direttrice $y = \frac{-1-\Delta}{4a}$	intersezioni con l'asse x	intersezioni con l'asse y
$y = -3x^2 + 5x + 2$	$5^2 - 4(-3)2 = 49$ $\Delta = 49$	$x = -\frac{5}{2(-3)}$ $x = \frac{5}{6}$	$V\left(\frac{5}{6}, \frac{49}{12}\right)$	$y_f = \dots = 4$ $F\left(\frac{5}{6}, 4\right)$	$y = \frac{-1-49}{4(-3)}$ $y = \frac{25}{6}$	$-3x^2 + 5x + 2 = 0$ $x = -\frac{1}{3}, x = 2$	$x = 0;$ $y = 2$
$y = 4x^2$							
$y = 2x^2 - 4x$							
$y = -x^2 - 2x - 1$							
$y = 2x^2 + 3$							
$y = \frac{4}{25}x^2 - \frac{8}{5}x + 3$							
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$							

Allegato 3:

Le disequazioni di II grado

Una disequazione intera di II grado può sempre essere riportata alla forma $ax^2 + bx + c > 0$

che a sua volta può essere scritta come
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y > 0 \end{cases}$$

l'interpretazione grafica di tale sistema è la seguente:

determinare i punti della parabola aventi ordinata positiva

Se la disequazione da risolvere è del tipo $ax^2 + bx + c < 0$ si considera invece il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y < 0 \end{cases}$$

e perciò si dovrà determinare l'insieme dei punti della parabola con ordinata negativa

se nella disequazione compare il segno \leq o \geq si dovranno considerare come soluzione anche gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse delle x

questi si ottengono risolvendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

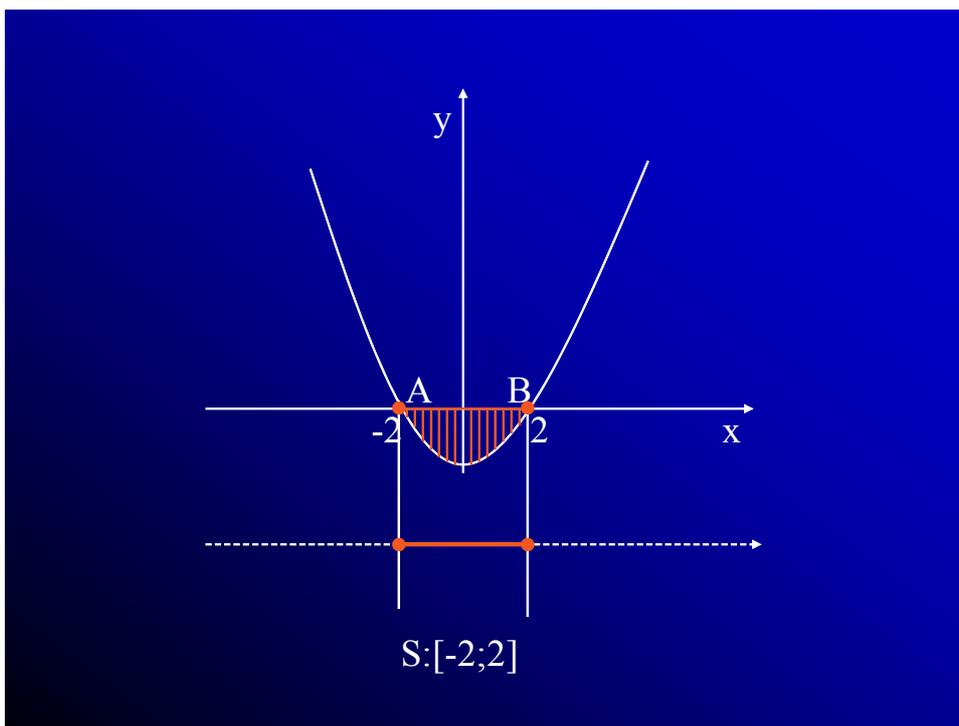
esempio 1

Risolvere la disequazione $x^2 - 4 \leq 0$

Tale disequazione equivale al sistema
$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

Dobbiamo perciò determinare i punti della parabola $y = x^2 - 4$ che giacciono nel semipiano delle ordinate negative o nulle

Tale parabola ha la concavità rivolta verso l'alto ed interseca l'asse delle x nei punti A(-2;0) e B(2;0)

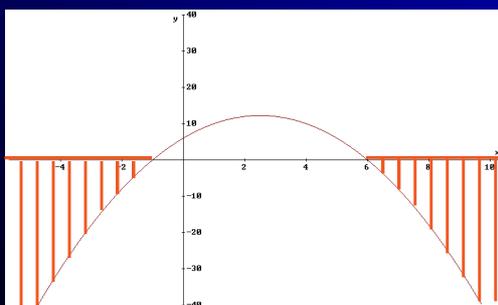


esempio 2

Risolvere la disequazione $-x^2 + 5x + 6 < 0$

Tale disequazione equivale al sistema $\begin{cases} y = -x^2 + 5x + 6 \\ y < 0 \end{cases}$

Risolviamo la $-x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 6 \end{cases}$

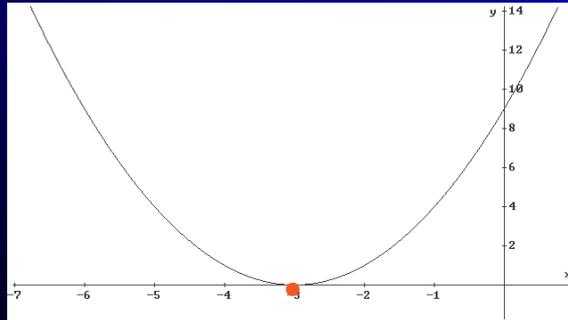


$S:]-\infty; -1[\cup]6; \infty[$

esempio 3

$$x^2 + 6x + 9 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = x^2 + 6x + 9 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -3$$

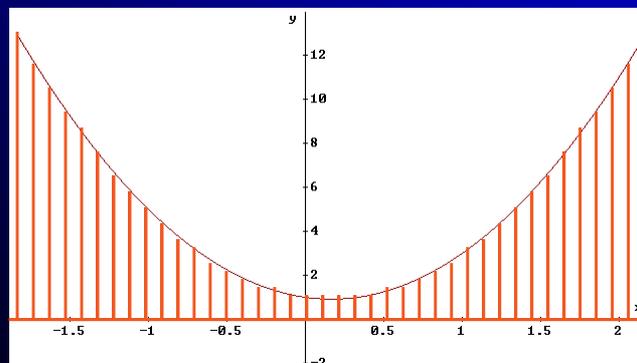


$$S = \{-3\}$$

esempio 4

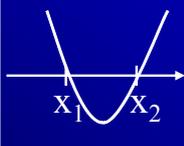
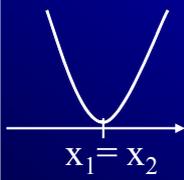
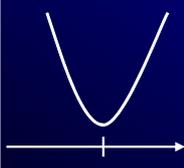
$$3x^2 - x + 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$3x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow \text{non ha radici reali}$$



$$S = \mathbb{R}$$

Allegato 4:

$\Delta=b^2-4ac$	parabola	valori di x che soddisfano la disequazione			
		$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$\Delta > 0$ ($x_1 < x_2$)		$x < x_1$ \vee $x > x_2$	$x \leq x_1$ \vee $x \geq x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta = 0$		qualsiasi x con $x \neq -\frac{b}{2a}$	$\forall x \in \mathcal{R}$	nessun valore di x	$x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$		$\forall x \in \mathcal{R}$	$\forall x \in \mathcal{R}$	nessun valore di x	nessun valore di x

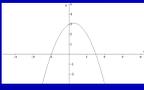
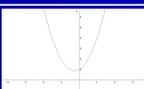
Dall'analisi dello schema si deduce che:

$\Delta > 0 \longrightarrow ax^2 + bx + c$ assume lo stesso segno di a per valori esterni all'intervallo delle radici

$\Delta = 0 \longrightarrow ax^2 + bx + c$ assume sempre lo stesso segno di a escluso i valori per i quali si annulla

$\Delta < 0 \longrightarrow ax^2 + bx + c$ assume sempre lo stesso segno di a

Allegato 5:

trinomio $ax^2 + bx + c$	scrivi l'equazione della parabola corrispondente $y = ax^2 + bx + c$	scrivi il coefficiente del termine di 2° grado e indica il tipo di concavità della parabola	determina le intersezioni della parabola con l'asse delle x	disegna il grafico approssimato della parabola	Scrivi i valori di x per cui $ax^2 + bx + c > 0$	Scrivi i valori di x per cui $ax^2 + bx + c < 0$
$-2x^2+x+3$	$y = -2x^2+x+3$	$a = -2$ La parabola volge la concavità verso il basso	$-2x^2+x+3 = 0$ $x_1 = -1, x_2 = 3/2$		$-1 < x < 3/2$	$x < -1 \vee x > 3/2$
$2x^2+x+1$	$y = 2x^2+x+1$	$a = 2$ La parabola volge la concavità verso l'alto	$2x^2+x+1 = 0$ non ci sono intersezioni		R	\emptyset
$-x^2-2x-1$						
$6x^2 + x - 2$						
$-x^2 + 2x - 3$						
$-3x^2 + x - 2$						

Gli argomenti del lavoro sono stati ripartiti nel seguente modo:

✓ Cristina Ribero:

- Obiettivi di apprendimento (capitolo 1)
- Indicatori di avvenuto raggiungimento (capitolo 2)
- Destinatari del percorso di apprendimento (capitolo 3)

✓ Giacomo Mario Bergesio:

- Tipologia e struttura della prova (capitolo 4)
- Accorgimenti per la somministrazione della prova (capitolo 5)

✓ Maria Teresa Ravera:

- Criteri di valutazione e regole di assegnazione dei punteggi (capitolo 6)
- Resoconto della somministrazione e analisi dei risultati (capitolo 7)
- Analisi degli item (capitolo 8)

✓ Silvia Costantino

- Indicazioni per il recupero degli allievi e per la programmazione successiva (capitolo 9)
- Conclusione e riflessione finale (capitolo 10)