CORSO DI PEDAGOGIA SPERIMENTALE

ANALISI DI UNA PROVA DI VALUTAZIONE DI MATEMATICA

DOCENTE DEL CORSO
Prof. Roberto Trinchero

SPECIALIZZANDA
Dott.ssa Chiara Baldovino
Indirizzo FIM Classi A047-A049
chiara.baldovino@gmail.com

Indice

1 Destinatari della prova **2**

2 Contenuti e prerequisiti **2**

3 Obiettivi generali **3**

4 Obiettivi di apprendimento e descrittori di raggiungimento **4**

5 Tipologia e struttura della prova **6**
5.1 Accorgimenti per la somministrazione 7

6 Prova di verifica e correttore **7**

7 Criteri di scoring **7**

8 Griglia e criteri di valutazione **8**

9 Resoconto somministrazione, risultati della prova e relativa analisi **10**
9.1 Resoconto della somministrazione 10
9.2 I risultati della prova 11
9.3 Frequenze, Percentuali, Indici di tendenza e di posizione 12

10 Parametri descrittivi relativi agli item **16**
10.1 Indici di tendenza relativi agli item 16
10.2 Indice di difficoltà 16
10.3 Potere discriminante 17
10.4 Indice di selettività 19
10.5 Indice di affidabilità 20
10.6 Riflessione sull'analisi degli item 21

11 Indicazioni per il recupero e la programmazione successiva **21**

12 Autoriflessione conclusiva **22**

1 Destinatari della prova

La prova di verifica presa in esame è stata somministrata da me nell'ambito di un tirocinio diretto di matematica in una classe quinta Liceo Scientifico di ordinamento nel mese di dicembre del 2008; la verifica ha fatto seguito ad un intervento didattico della durata di otto ore. Il tema di tale intervento ha riguardato l'introduzione al concetto di derivata: si è pensato ad un'introduzione con un software libero di geometria dinamica (Geogebra) che privilegiasse la scoperta del forte legame tra definizione algebrica e significato geometrico della derivata in un dato punto di una funzione (come coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto), della giustificazione di tale significato e del significato di funzione derivata (3 ore). A questa parte sono seguite lezioni frontali di formalizzazione dei concetti e di applicazioni (con esempi ed esercizi) di quanto spiegato e lezioni di esercitazione con gli studenti che hanno svolto esercizi alla lavagna (5 ore). La classe a cui è stata somministrata la prova di verifica è formata da 24 studenti, di cui 7 femmine e 17 maschi, e non sono presenti allievi con situazioni particolari o di handicap.

2 Contenuti e prerequisiti

Elenchiamo i **contenuti specifici** che ho trattato nell'intervento didattico e i **prerequisiti** necessari per lo svolgimento dello stesso.

Contenuti specifici

- Concetto di tangente al grafico di una funzione in un punto.
- Definizione algebrica di derivata di una funzione in un punto.
- Significato geometrico della derivata in un punto (coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel punto) e sua giustificazione.
- Definizione di funzione derivabile in un punto.
- Calcolo della derivata di una funzione in un punto tramite la definizione.
- Equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto utilizzando la derivata.
- Concetto di funzione derivata di una funzione.
- Funzione derivata delle funzioni elementari con dimostrazione della funzione derivata di $f(x) = k$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$.
- Teorema della derivata della somma di due o più funzioni e della derivata del prodotto di una funzione per una costante.

Prerequisiti

- Saper manipolare algebricamente espressioni.
- Conoscere il significato geometrico del coefficiente angolare di una retta e saperne riconoscere il valore osservando l'equazione.
- Saper scrivere l'equazione della retta passante per due punti dati o per un punto dato e con un certo coefficiente angolare.
- Saper disegnare una retta nel piano cartesiano conoscendone l'equazione.
- Saper leggere le coordinate di un punto dal grafico di una funzione.
- Saper calcolare il valore di una funzione in un punto specifico o in un punto generico.
- Conoscere il significato di limite.
- Saper calcolare semplici limiti (notevoli e non) al tendere della variabile a 0.

3 Obiettivi generali

Elenchiamo gli obiettivi generali dell'unità didattica suddividendoli tra **obiettivi specifici** (relativi alla disciplina) e **obiettivi trasversali** (interdisciplinari).

Obiettivi specifici

- Acquisire il concetto di retta tangente al grafico di una funzione in un punto del dominio.
- Acquisire il concetto di derivata di una funzione in un punto del dominio e conoscerne il suo significato geometrico sapendo darne giustificazione.
- Saper calcolare la derivata di una funzione in un punto.
- Saper calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto sfruttando la nozione di derivata.
- Saper disegnare la retta tangente al grafico di una funzione in un punto.
- Acquisire il concetto di funzione derivata di una funzione.
- Saper dimostrare come si calcolano le funzioni derivate delle funzioni $f(x) = k$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$.

- Saper calcolare le funzioni derivate delle altre funzioni elementari ($f(x) = x^a$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \log_a x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = a^x$).
- Conoscere i teoremi della derivata della somma di due o più funzioni o del prodotto di una funzione per una costante.
- Saper calcolare le funzioni derivate delle funzioni che sono somme di due o più funzioni elementari o prodotti di una costante per una funzione elementare.
- Saper calcolare la derivata di una funzione elementare in un punto utilizzando la funzione derivata.

Obiettivi trasversali

- Saper applicare ragionamenti di tipo deduttivo.
- Sviluppare senso critico nell'interpretazione del risultato.
- Imparare a formulare ipotesi e a verificarle confrontandole con i compagni.
- Saper applicare regole e procedure adeguate al tipo di problema.
- Saper usare simboli e linguaggio scientifico opportuni.

4 Obiettivi di apprendimento e descrittori di raggiungimento

La prova è strutturata in 10 item ciascuno dei quali è volto a misurare il raggiungimento di uno o più obiettivi cognitivi secondo quanto riportato nella seguente tabella.

Item della prova	Obiettivi di apprendimento	Classificazione Anderson e Krathwohl	Indicatori/Descrittori
1	Conoscere la definizione di derivata di una funzione in un punto. Conoscerne il significato geometrico.	Ricordare-Conoscere	Lo studente sa scrivere la definizione di derivata di una funzione in un punto e ne sa illustrare il significato geometrico.
2	Saper spiegare perchè la derivata di una funzione in un punto c è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto con ascissa c.	Ricordare-Comprendere	Lo studente sa spiegare perchè la derivata di una funzione in un punto c è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto con ascissa c ripercorrendo un ragionamento operato con l'utilizzo di un software di Geometria dinamica ed è in grado di motivarne i passaggi logici.
3	Conoscere le funzioni derivate delle funzioni elementari.	Ricordare-Conoscere	Lo studente sa scrivere le funzioni derivate delle funzioni elementari che sono state date da imparare a memoria o di cui è stata mostrata la dimostrazione.
4	Saper calcolare le funzioni derivate di funzioni elementari o che che sono somme di funzioni elementari o prodotti di funzioni elementari per una costante.	Applicare-Eseguire	Lo studente sa calcolare le funzioni derivate di quattro funzioni che sono funzioni elementari o somme di funzioni elementari o prodotti di funzioni elementari per una costante.
5	Conoscere i teoremi della derivata della somma di funzioni e del prodotto per una costante. Saper fornire esempi in cui è possibile utilizzare i teoremi.	Ricordare-Creare	Lo studente sa completare gli enunciati dei teoremi della derivata della somma di funzioni e del prodotto per una costante; lo studente sa fornire esempi di funzioni elementari in cui possibile utilizzare i teoremi.

Item della prova	Obiettivi di apprendimento	Classificazione Anderson e Krathwohl	Indicatori/Descrittori
6	Saper calcolare la derivata di una funzione in un punto.	Applicare-Eseguire	Lo studente sa calcolare la derivata di tre diverse funzioni in un punto esplicitando i passaggi che compie e il risultato.
7	Saper controllare le derivate in un punto tramite le funzioni derivate.	Valutare-Analizzare	Lo studente sa controllare le derivate in un punto dell'item precedente utilizzando le funzioni derivate delle funzioni $f(x)=x^2, g(x)=\frac{1}{x}, h(x)=\sin x$ e valutandole nei punti indicati.
8	Saper calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto sfruttando il significato geometrico di derivata. Saper disegnare la retta tangente conoscendone l'equazione.	Applicare-Eseguire	Lo studente sa calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di tre funzioni differenti in un punto sfruttando il significato geometrico di derivata ed esplicitando i passaggi che compie e il risultato. Lo studente sa disegnare la retta tangente a tre grafici in un punto assegnato avendone l'equazione e il grafico.
9	Conoscere il significato di funzione derivata di una funzione	Comprendere	Lo studente sa spiegare cosa significa che la funzione $\cos x$ è la funzione derivata della funzione $f(x)=\sin x$.
10	Dimostrare le funzioni derivate delle funzioni elementari.	Ricordare-Comprendere	Lo studente sa dimostrare che la funzione $\cos x$ è la funzione derivata della funzione $f(x)=\sin x$ esplicitando e giustificando i passaggi.

5 Tipologia e struttura della prova

La prova è stata pensata con la duplice funzione di verifica, ma anche di incentivo allo studio: l'insegnante tutor infatti temeva che gli allievi non avrebbero studiato di volta in volta questi argomenti fondamentali se non si fosse somministrata una prova in itinere. Questa preoccupazione è alla base della scelta degli item che tendono a verificare maggiormente obiettivi di

apprendimento legati alle categorie del conoscere e ricordare e meno obiettivi riguardanti categorie dell'applicare, esguire, analizzare. La verifica è stata in ogni caso strutturata con una buona varietà di item in modo da verificare il raggiungimento degli obiettivi descritti tenendo conto del tempo dedicato alla trattazione di ciascun argomento: proprio per questo motivo, la prova rivela un carattere prevalentemente teorico ad esclusione degli esercizi 4, 6 ed 8 di carattere più applicativo. Gli esercizi 2 e 9 richiedono una capacità di sintesi e comprensione critica di quanto studiato.

5.1 Accorgimenti per la somministrazione

La prova è stata pensata per essere somministrata in 60 minuti; per rendere più veloce la compilazione si sono preparati alcuni item (tabelle, enunciati, grafici) da completare direttamente sui fogli che si sono consegnati agli studenti. Si è ritenuto opportuno mettere gli studenti a conoscenza del punteggio massimo attribuito ad ogni item: questi non sono stati scritti sulla prova, ma sono stati esplicitati a voce; in particolare, si è messo in evidenza come fosse necessario raggiungere i 60 punti per avere la sufficienza.

6 Prova di verifica e correttore

Nel file allegato "Baldovino_Verifica.pdf" è contenuto il testo della verifica somministrata agli studenti, mentre nel file "Baldovino_Correttore.pdf" si trova la soluzione dettagliata di ogni singolo esercizio.

7 Criteri di scoring

La somma totale dei punteggi assegnati è 100; all'interno di ogni esercizio il punteggio è stato ripartito secondo quanto riportato nella griglia di valutazione. Sono state anche assegnate parzialità di punteggi (anch'esse indicate in dettaglio nella griglia di valutazione) che permettono una valutazione più analitica e tengono conto del punto a cui lo studente è riuscito ad arrivare nei diversi esercizi.
Nell'attribuzione del punteggio massimo di ogni item si sono seguiti criteri di omogeneità, ma nella scelta si è anche tenuto conto degli obiettivi cognitivi che si voleva testare con ognuno di essi in modo tale che al conseguimento della sufficienza corrispondesse un adeguato raggiungimento degli obiettivi minimi.

8 Griglia e criteri di valutazione

Per correggere la prova ho utilizzato la seguente griglia di valutazione che contiene i sotto-punteggi e le parzialità.

ITEM	PUNTEGGI
1	Punteggio totale: 10. Sottopunteggi: 5 punti per definizione di derivata, 5 per significato geometrico. Parzialità: 3 punti per definizione con formula corretta senza spiegazione.
2	Punteggio totale: 10. Parzialità: 5 punti per giustificazione mancante di passaggi algebrici, ma in cui emerge concetto di derivata come limite del coefficiente angolare della retta secante.
3	Punteggio totale: 10. Sottopunteggi: 1 punto per ogni derivata elementare corretta. Parzialità: nessuna (richiesta non soddisfatta pienamente: 0).
4	Punteggio totale: 10. Sottopunteggi: 2,5 punti per ogni funzione derivata corretta. Parzialità: -1 se si sbaglia la derivata di **un solo** addendo.
5	Punteggio totale: 10. Sottopunteggi: 3 punti per ogni enunciato completato correttamente, 1 punto per ogni esempio corretto. Parzialità: nessuna (richiesta non soddisfatta pienamente: 0).
6	Punteggio totale: 15. Sottopunteggi: 5 punti per ogni derivata corretta. Parzialità: 3 punti se nel calcolo è presente un errore non grave.
7	Punteggio totale: 5. Parzialità: 3 punti per risposta corretta priva di verifica.
8	Punteggio totale: 15. Sottopunteggi: 3 punti per ogni equazione corretta, 2 punti per ogni retta disegnata correttamente. Parzialità: nessuna (richiesta non soddisfatta pienamente: 0).
9	Punteggio totale: 5. Parzialità: 3 punti per spiegazione non precisa, ma in cui emerge correttezza del concetto.
10	Punteggio totale: 10. Parzialità: 2 punti per scrittura generica del rapporto incrementale, -2 punti per ogni passaggio errato nella dimostrazione che non ne preclude la prosecuzione.

Si è stabilito che il voto minimo è 2, quello massimo 10. Dopo aver calcolato il punteggio ottenuto da ciascuno studente, si è costruita la tabella di conversione che mi ha permesso di attribuire un voto compreso tra 2 e 10. Si è stabilito che per ottenere la sufficienza (voto 6) è necessario totalizzare 60 punti, mentre il voto massimo corrisponde ad una prova in cui si sono realizzati 100 punti; operate queste scelte, è stato possibile ottenere tutti gli altri voti corrispondenti ai punteggi degli studenti utilizzando i due seguenti fattori di scala:

- **fattore di scala della sufficienza**

$$f_{ss}=\frac{\textit{Punteggio totale-Punteggio sufficienza}}{\textit{Voto massimo-Voto sufficienza}}=\frac{100-60}{10-6}=\frac{40}{4}=10;$$

- **fattore di scala dell'insufficienza**

$$f_{si}=\frac{\textit{Punteggio sufficienza}}{\textit{Voto sufficienza-Voto minimo}}=\frac{60}{6-2}=\frac{60}{4}=15.$$

Utilizzando le seguenti formule è stato possibile ricavare tutti i voti intermedi.

- Se il punteggio totale della prova dello studente è risultato maggiore o uguale al punteggio di sufficienza (≥ 60) allora

$$\textit{Voto non approx.} = \textit{Voto sufficienza}+\frac{\textit{Punteggio totale studente-Punteggio sufficienza}}{\textit{Fattore di scala sufficienza}}=$$
$$6+\frac{\textit{Punteggio totale studente-60}}{10}.$$

- Se il punteggio totale della prova dello studente è risultato minore del punteggio di sufficienza (< 60) allora

$$\textit{Voto non approx.} = \textit{Voto minimo}+\frac{\textit{Punteggio totale studente}}{\textit{Fattore di scala dell' insufficienza}}=$$
$$2+\frac{\textit{Punteggio totale studente}}{15}.$$

Per l'attribuzione finale del voto al singolo studente, oltre ai numeri interi da 2 a 10, si sono utilizzati anche i "quarti di voto"; ad esempio, tra il voto 7 ed il voto 8, sono attribuibili i voti

$$7+=7,25 \qquad 7\frac{1}{2}=7,5 \qquad 8-=7,75$$

Per consentire l'attribuzione di questi voti utilizzando il precedente criterio, si è resa necessaria un'operazione di approssimazione: si è scelta un'approssimazione al "quarto di voto" più vicino, cioè a quello per cui è risultata minima la differenza tra il valore ottenuto ed il valore approssimato.

9 Resoconto somministrazione, risultati della prova e relativa analisi

9.1 Resoconto della somministrazione

La prova è stata somministrata alla classe lasciando agli studenti 60 minuti (come si era progettato) poichè si è ritenuto che l'ora di 50 minuti non fosse sufficiente. Durante la prova erano presenti 22 studenti (6 femmine e 16 maschi) su 24.
Nonostante già esplicitamente detto loro, gli studenti hanno chiesto se potevano completare gli esercizi sui fogli che erano stati loro consegnati e in particolar modo se potevano disegnare le rette tangenti sui grafici che erano stati riportati sul testo della prova; a tali richieste è stata data risposta positiva. Gli studenti in un primo momento hanno reagito con stupore alla tipologia di prova alla quale non erano abituati, ma successivamente molti parevano quasi divertirsi nel cimentarsi con essa.

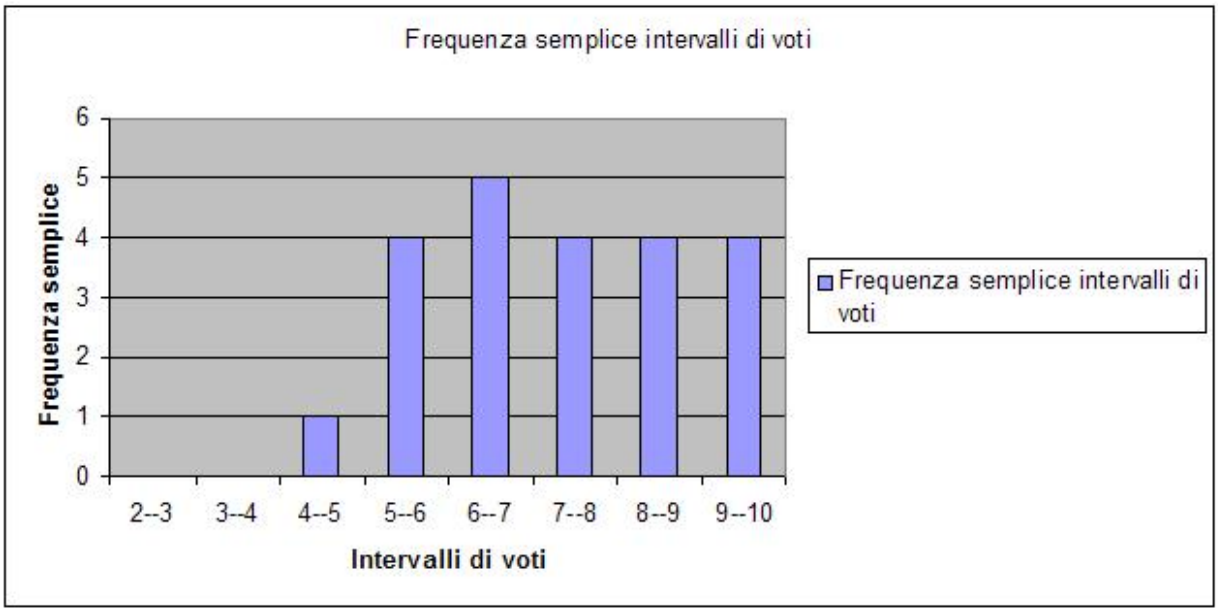
9.2 I risultati della prova

Nella tabella seguente ogni riga della matrice rappresenta uno studente e fornisce i punteggi da lui ottenuti per ogni item, il punteggio totale raggiunto, il voto corrispondente non approssimato e poi approssimato e finalmente il voto finale: questi ultimi sono stati attribuiti secondo i criteri di valutazione appena illustrati.

Studente	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10	*Punteggio*	*Non approx*	*Approssim.*	*Voto finale*
S1	10	10	7	5	9	15	5	15	3	8	87	8,7	8,75	9-
S2	10	5	9	9	6	15	5	13	0	8	80	8	8	8
S3	8	10	2	2	10	13	0	8	0	8	61	6,1	6	6
S4	10	10	8	9	10	15	5	15	3	10	95	9,5	9,5	9½
S5	8	3	6	0	6	13	0	10	3	8	57	5,8	5,75	6-
S6	10	5	10	10	10	15	5	15	0	10	90	9	9	9
S7	5	3	10	10	10	10	5	13	3	8	77	7,7	7,75	8-
S8	8	5	3	4	10	13	5	15	0	6	69	6,9	7	7
S9	10	10	10	7,5	10	13	0	10	0	8	78,5	7,85	7,75	8-
S10	10	10	5	4	3	3	5	8	3	2	53	5,5333333	5,5	5½
S11	8	10	8	10	10	15	5	13	0	10	89	8,9	9	9
S12	3	0	6	7,5	3	10	0	6	0	0	35,5	4,3666667	4,25	4+
S13	8	5	8	4	10	6	3	6	0	8	58	5,8666667	5,75	6-
S14	10	0	7	2,5	6	0	5	13	0	6	49,5	5,3	5,25	5+
S15	10	0	6	5	3	15	0	13	3	10	65	6,5	6,5	6½
S16	10	5	9	10	10	13	3	8	0	10	78	7,8	7,75	8-
S17	10	5	8	10	10	15	5	15	3	10	91	9,1	9	9
S18	10	8	7	10	6	15	5	15	0	10	86	8,6	8,5	8½
S19	5	5	9	5	6	9	5	6	0	10	60	6	6	6
S20	10	5	6	5	6	13	0	13	3	0	61	6,1	6	6
S21	10	3	9	7,5	10	15	5	15	0	6	80,5	8,05	8	8
S22	10	5	9	9	6	10	5	0	5	6	65	6,5	6,5	6½

I risultati sono superiori all'usuale andamento della classe: questo fatto può essere giustificato dal fatto che la prova voleva testare soprattutto l'acquisizione di nuovi concetti e non ha puntato quasi per nulla sull'abilità di calcolo e su applicazioni diverse da quelle trattate in aula.

Il seguente istogramma fornisce la distribuzione dei risultati ottenuti in base alla fascia di votazione ($x \leq$ voto $< x + 1$).

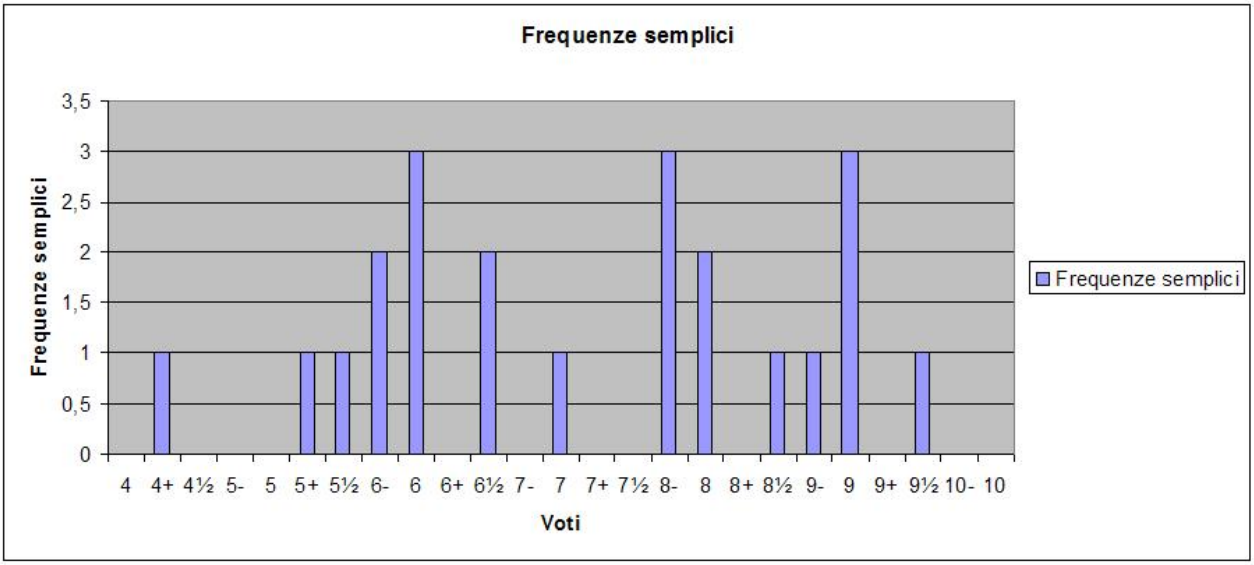


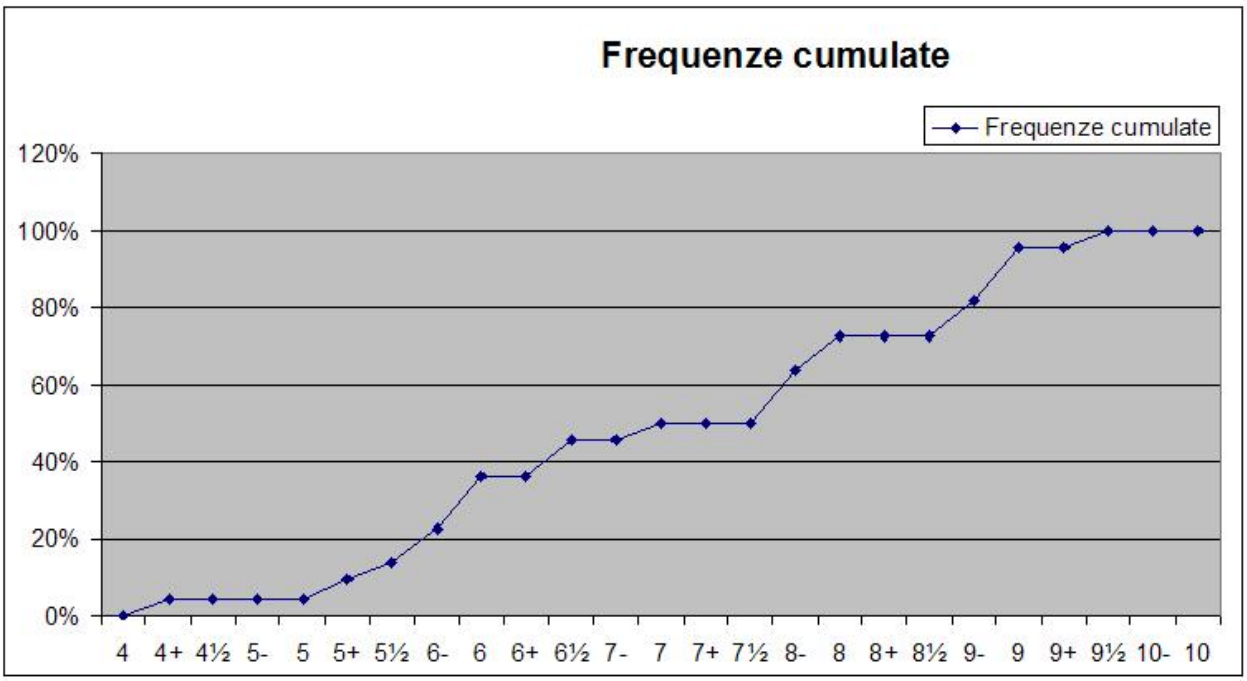
La fascia in cui è presente una maggior densità di voti è quella compresa tra il voto 6 (compreso) ed il voto 7 (escluso): è comunque da notare una densità molto simile fra tutte le fasce della sufficienza. Nessuno studente ha ottenuto il voto massimo, ma quattro studenti hanno ottenuto un voto superiore o uguale a 9.

9.3 Frequenze, Percentuali, Indici di tendenza e di posizione

La tabella seguente mostra le frequenze semplici e cumulate e le rispettive percentuali per ogni voto attribuibile. Essa è seguita dal relativo istogramma per le frequenze semplici e dal grafico ad ogiva per quelle cumulate.

Voto	Frequenza semplic	Perc. semplice	Frequenza cumulata	Perc. cumulata
2	0	0%	0	0
2+	0	0%	0	0
2½	0	0%	0	0
3-	0	0%	0	0
3	0	0%	0	0
3+	0	0%	0	0
3½	0	0%	0	0
4-	0	0%	0	0
4	0	0%	0	0
4+	1	4,55%	1	4,55%
4½	0	0%	1	4,55%
5-	0	0%	1	4,55%
5	0	0%	1	4,55%
5+	1	4,55%	2	9,09%
5½	1	4,55%	3	13,64%
6-	2	9,09%	5	22,72%
6	3	13,63%	8	36,37%
6+	0	0%	8	36,37%
6½	2	9,09%	10	45,45%
7-	0	0%	10	45,45%
7	1	4,55%	11	50%
7+	0	0%	11	50%
7½	0	0%	11	50%
8-	3	13,63%	14	63,64%
8	2	9,09%	16	72,73%
8+	0	0%	16	72,73%
8½	1	4,55%	17	72,73%
9-	1	4,55%	18	81,82%
9	3	13,63%	21	95,45%
9+	0	0%	21	95,45%
9½	1	4,55%	22	100%
10-	0	0%	22	100%
10	0	0%	22	100%





Gli studenti che hanno riportato un voto maggiore o uguale al voto di sufficienza sono 17 su 22, e quindi sono in percentuale il 77,27%. Se consideriamo anche le insufficienze non gravi (voti maggiori o uguali a $5\frac{1}{2}$), allora i voti sono 20 su 22 e la percentuale sale al 91%.

Qui di seguito riportiamo una tabella con il calcolo della moda, mediana, media e scarto tipo dei risultati e un'altra in cui gli studenti vengono ordinati sfruttando un importante

indice di posizione (**punteggio standardizzato o punteggio z**) basato sulle distanze di ciascun punteggio dalla media della classe, espressa in termini di scarti tipo calcolati sulla classe stessa. L'espressione di tale distanza dalla media può essere fatta in modo più agevole ricodificando i punti z in 11 categorie (**punti C di Guilford**) oppure in 5 categorie (**punti della distribuzione pentenaria**). Ordinare le prestazioni degli studenti risulta anche utile per l'analisi degli item.

MODA	6	8-	9
MEDIANA	7		
MEDIA	7,159090909		
SCARTO QUADRATICO	1,449030739		
MEDIO			

Tabella di posizione

STUDENTE	VOTO APPROX.	PUNTEGGIO STANDARDIZZATO	PUNTO C DI GUILFORD	PUNTO PENTENARIA
S4	9,5	1,615499953	8	E
S17	9	1,270441711	8	D
S11	9	1,270441711	8	D
S6	9	1,270441711	8	D
S1	8,75	1,097912589	7	D
S18	8,5	0,925383468	7	D
S21	8	0,580325226	6	D
S21	8	0,580325226	6	D
S16	7,75	0,407796105	6	C
S9	7,75	0,407796105	6	C
S7	7,75	0,407796105	6	C
S8	7	-0,109791259	5	C
S22	6,5	-0,454849501	4	C
S15	6,5	-0,454849501	4	C
S20	6	-0,799907744	3	B
S19	6	-0,799907744	3	B
S3	6	-0,799907744	3	B
S13	5,75	-0,972436865	3	B
S5	5,75	-0,972436865	3	B
S10	5,5	-1,144965986	3	B
S14	5,25	-1,317495107	2	B
S12	4,25	-2,007611592	1	A

10 Parametri descrittivi relativi agli item

Calcoliamo ora i parametri descrittivi relativi agli item che risultano utili per la messa a punto della prova di valutazione.

10.1 Indici di tendenza relativi agli item

Per tutti gli item, sono stati calcolati punteggio massimo, punteggio minimo e gli indici di tendenza centrale vale a dire media, moda e mediana ed infine lo scarto tipo (o scarto quadratico medio).

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10	Totale
Punteggio Min	3	0	2	0	3	0	0	0	0	0	8
Punteggio Max	10	10	10	10	10	15	5	15	5	10	100
Media	8,77	5,55	7,36	6,64	7,73	11,86	3,45	11,14	1,32	7,36	71,18182
Moda	10	5	9	10	10	15	5	15	0	10	89
Mediana	10	5	8	7,5	9,5	13	5	13	0	8	79
Scarto tipo	1,9756	3,2991	2,101	3,023	2,579	4,093	2,1894	4,0485	1,634	3,0383	

L'item 9 è stato quello su cui gli studenti hanno incontrato le maggiori difficoltà (la moda e la mediana relative sono 0), mentre quello più facile è stato il primo. Comunque tutti gli item sono stati risolti, anche se da studenti differenti.

10.2 Indice di difficoltà

L'*indice di difficoltà* di un item è dato dal rapporto tra i punti ottenuti da tutti i compilatori su quel dato item e il punteggio massimo ottenibile sull'item (punteggio ottenuto dalla somma di tutti i punteggi, se tutti i compilatori avessero risposto in modo corretto):

$$\mathrm{ID} = \frac{P_{tot}}{P_{max}}.$$

Tale indice varia tra 0 e 1:

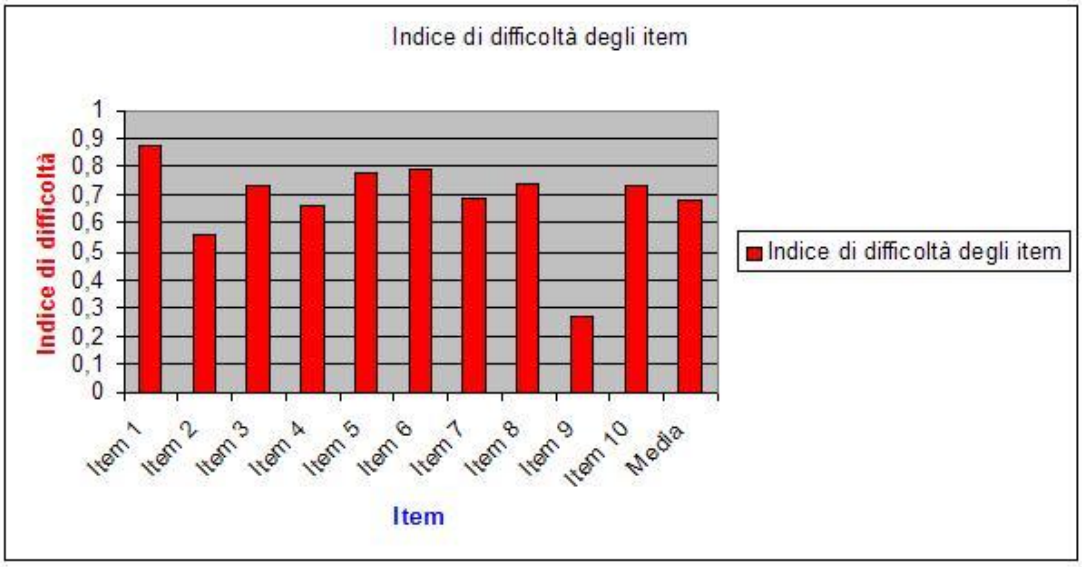
- se ID = 0 significa che l'item è di difficoltà troppo elevata dal momento che nessun allievo è riuscito a dare una risposta corretta;
- se ID = 1 significa invece che l'item è troppo facile visto che tutti gli allievi hanno risposto correttamente;

- per i valori compresi tra 0 e 1 possiamo costruire la seguente tabella di riferimento:

Valori dell'indice di difficoltà dell'item	Grado di difficoltà dell'item
$0 - 0,25$	difficile
$0,26 - 0,5$	medio-difficile
$0,51 - 0,75$	medio-facile
$0,76 - 1$	facile

Riportiamo ora la tabella e l'istogramma relativi all'indice di difficoltà degli item della nostra prova:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10	Media
Indice di difficoltà	0,8773	0,555	0,736	0,664	0,773	0,791	0,6909	0,742	0,264	0,7364	0,682879



Dal confronto con la tabella di riferimento si nota che il nono item e in parte anche il secondo sono risultati i più difficili, mentre il primo, il quinto ed il sesto sono risultati facili. La difficoltà è per tutti gli altri esercizi di livello medio-facile, come conferma la media degli indici di difficoltà su ciascun item che è $0,68$.

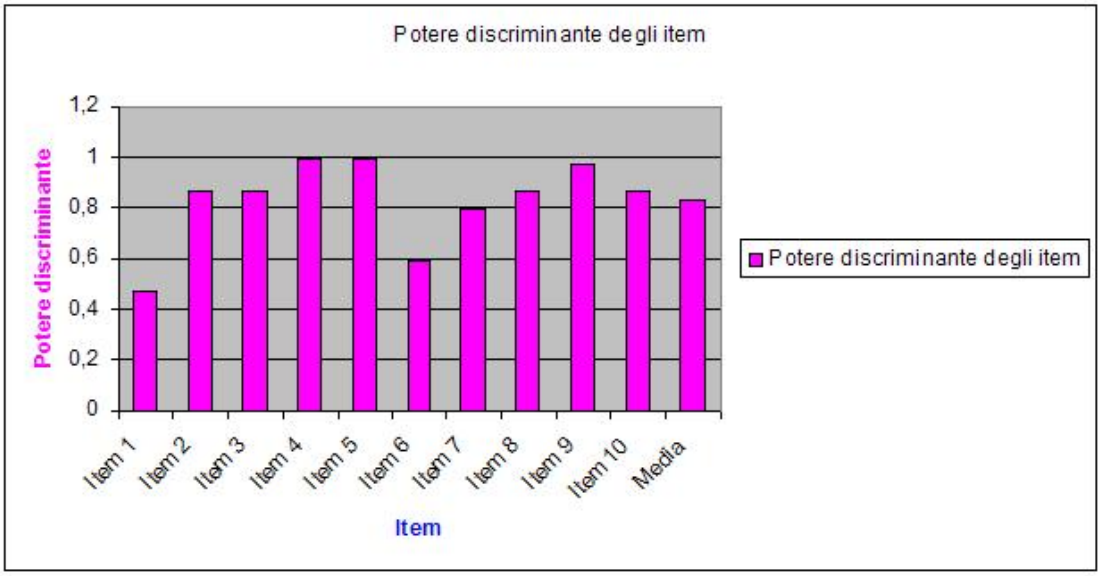
10.3 Potere discriminante

Il *potere discriminante* di un item è dato dal prodotto tra il numero di risposte esatte date all'item (indicato con E) e il numero di risposte sbagliate date all'item (indicato con S), rapportato alla metà del numero totale di risposte (N) elevato al quadrato:

$$\mathrm{PD} = \frac{E * S}{(\frac{N}{2})^2}.$$

Il potere discriminante varia tra 0 (tutti gli studenti hanno risposto in modo corretto o in modo errato, quindi il potere discriminante è nullo) e 1 (metà degli studenti ha risposto correttamente e metà in modo errato, quindi il potere discriminante è massimo). La funzione di questo indice è mettere in luce gli item maggiormente utili a discriminare chi ha raggiunto gli obiettivi da chi non li ha raggiunti.
Poichè questo indice non tiene conto delle non risposte e dei differenti pesi attribuiti a ciascun item e pertanto va calcolato su dati dicotomizzati, ho deciso di considerare corretta ogni risposta che ha totalizzato almeno due terzi del punteggio massimo ed errata una risposta che ha totalizzato meno dei due terzi del punteggio massimo. Riportiamo quindi la tabella e l'istogramma relativo al potere discriminante degli item della nostra prova:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10	Media
Corrette (>=2/3 punt.Max.)	19	7	15	12	12	18	16	15	9	15	
Errate	3	15	7	10	10	4	6	7	13	7	
Potere discriminante	0,4711	0,868	0,868	0,992	0,992	0,595	0,7934	0,868	0,967	0,8678	0,828099



Il valore medio del potere discriminante è alto e pari a 0,83: la maggior parte degli item infatti ha un alto potere discriminante; gli item con il potere discriminante più basso sono il primo e il sesto.

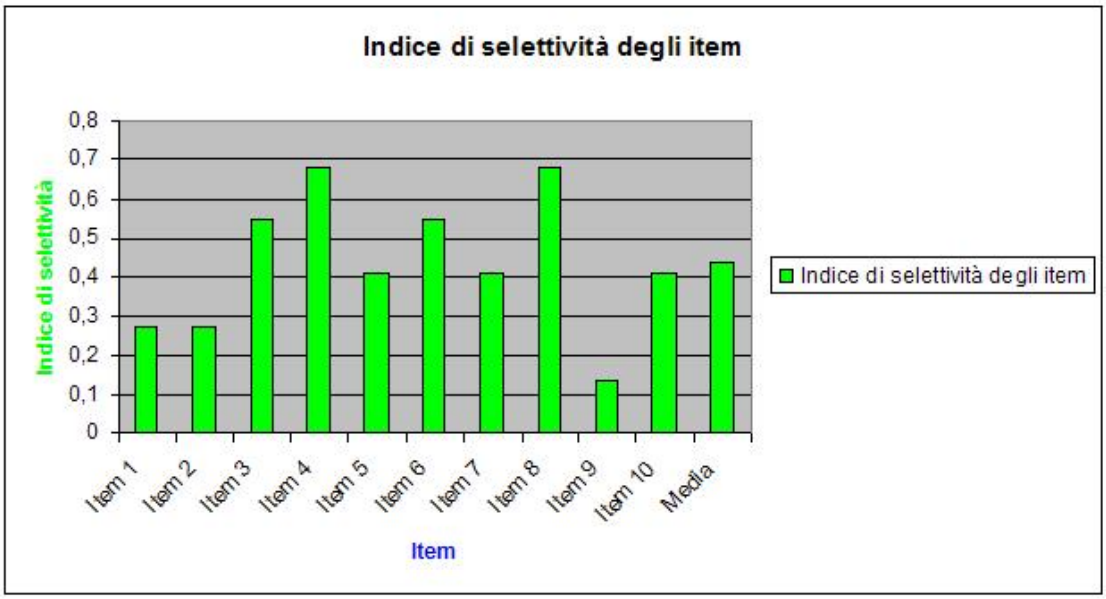
10.4 Indice di selettività

L'*indice di selettività* di un item è dato dalla differenza tra il numero di risposte esatte date all'item da parte degli studenti con i risultati migliori nell'intera prova (convenzionalmente si considera un terzo del totale degli allievi, corrispondenti al terzo che ha ottenuto il punteggio più alto), indicato con N_m e il numero totale di risposte esatte all'item dato dagli allievi che hanno ottenuto i risultati peggiori nell'intera prova (convenzionalmente si prende un terzo del totale degli allievi, corrispondenti al terzo che ha ottenuto il punteggio più basso), indicato con N_p, rapportato al numero totale degli allievi (N) diviso 3: $\mathrm{IS} = \frac{\mathrm{N}_m - \mathrm{N}_p}{\frac{N}{3}}$.

L'indice di selettività varia tra -1 (i candidati che hanno ottenuto il miglior punteggio nella prova hanno risposto tutti in modo errato all'item e i candidati che hanno ottenuto il peggior punteggio nella prova hanno risposto tutti in modo corretto all'item: *selettività rovesciata*) e +1 (viceversa). Se vale 0 l'item non è assolutamente selettivo poiché tanti studenti preparati quanti meno preparati hanno risposto in modo corretto.

Poiché gli studenti che hanno effettuato la prova sono 22, considero i risultati dei primi 7 studenti con le prestazioni migliori per calcolare N_m (sfruttando la tabella di posizione) e i risultati degli ultimi 7 studenti con le prestazioni peggiori per calcolare N_p (sempre utilizzando la tabella di posizione). Ecco la tabella e l'istogramma con i valori ottenuti:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10	Media
N_m	7	4	7	6	5	7	7	7	3	7	
N_p	5	2	3	1	2	3	4	2	2	4	
Indice di selettività	0,2727	0,273	0,545	0,682	0,409	0,545	0,409	0,682	0,136	0,409	0,436

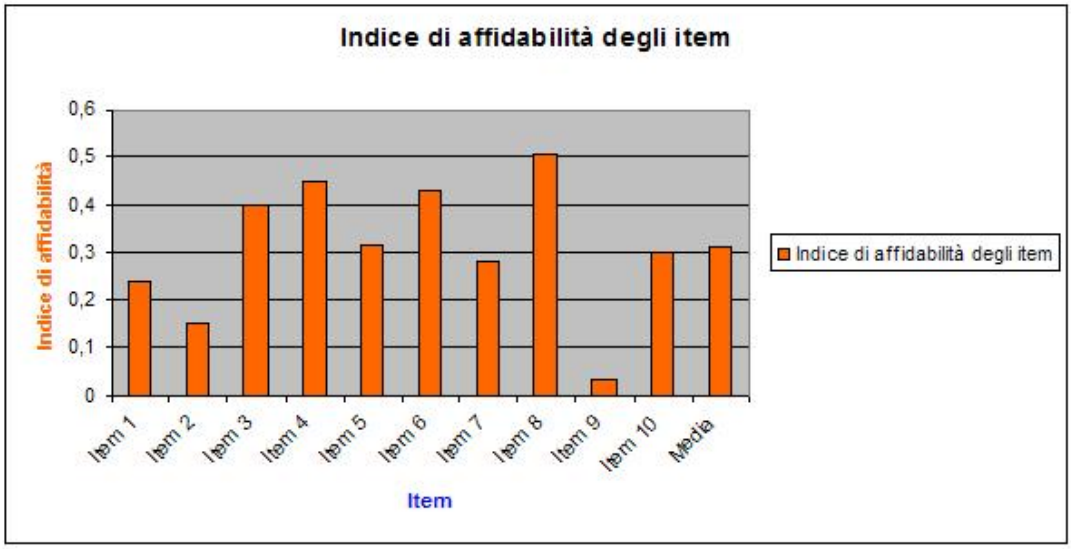


Il valore medio dell'indice di selettività è circa 0,44, quindi la prova può essere in generale considerata abbastanza selettiva. La prima osservazione macroscopica è che non vi sono item con indice di selettività negativa.
Si può notare che gli item 4 e 8 sono altamente selettivi: al quarto infatti 6 studenti sui 7 migliori hanno risposto correttamente, mentre solo uno dei 7 meno preparati ha fatto altrettanto; all'ottavo tutti i 7 migliori hanno risposto in maniera corretta, contro due sole risposte corrette da parte dei meno preparati. L'item 4 è applicativo e testa obiettivi di apprendimento che fanno riferimento a processi differenti dal conoscere-ricordare, mentre l'item 8 fa riferimento a conoscenze e abilità che gli studenti devono già possedere: queste possono essere valide spiegazioni per comprendere il loro elevato indice di selettività. L'item 9, al contrario, non è per nulla selettivo: infatti solo 3 tra i migliori e 2 fra gli studenti con punteggio più basso hanno risposto correttamente. Anche gli item 1 e 2 sono poco selettivi, mentre gli altri possono essere considerati abbastanza selettivi.

10.5 Indice di affidabilità

L'*indice di affidabilità* di un item è dato dal prodotto dell'indice di difficoltà e dell'indice di selettività: IA = ID $*$ IS. Questo indice varia tra -1 e 1. Un valore negativo dell'indice di affidabilità è dovuto al fatto che l'indice di selettività è negativo. Il fatto di ottenere un valore prossimo a 0 significa che l'item non discrimina in modo netto gli studenti più preparati da quelli meno preparati. Se si ottiene un valore prossimo a 1, significa che l'item discrimina in modo netto studenti preparati e meno preparati. Questo indice mette in evidenza come un "buon" item debba essere sufficientemente facile e sufficientemente discriminante. Ecco la tabella e l'istogramma con i valori ottenuti:

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10	Media
Indice di affidabilità	0,2393	0,151	0,402	0,452	0,316	0,431	0,2826	0,506	0,036	0,3012	0,311818



Dall'istogramma si nota che tutti gli item hanno indice di affidabilità positiva dal momento che tutti gli item hanno indice di selettività positiva; il valore medio dell'IA è circa uguale a 0,32 in accordo con il fatto che i valori dell'IA dei singoli item sono più vicini al valore 0 che al valore 1. Gli item con l'IA più alto sono il 4, il 6 e l'8 che testano obiettivi di apprendimento con riferimento a processi differenti dal conoscere-ricordare come l'eseguire-applicare.

10.6 Riflessione sull'analisi degli item

Alla luce dei risultati ottenuti dagli studenti e dopo aver analizzato gli indici relativi agli item apporterei alcune modifiche alla prova; essendo una prova volta a testare la conoscenza più che le abilità applicative-esecutive, essa è risultata forse troppo semplice come hanno percepito anche gli studenti. La scelta migliore penso sarebbe aggiungere un po' di materia in modo tale che risulti più semplice trovare connessioni e applicazioni da testare.
Per quel che riguarda gli item, terrei sicuramente i tre item che si sono rivelati affidabili e che testano effettivamente obiettivi di apprendimento diversi dal conoscere; manterrei anche gli item 1, 3 e 5 che testano una conoscenza di base (definizioni, formule da conoscere a memoria e che non possono essere ricavate ogni volta). Modificherei uno degli item 2 e 10 che testano una conoscenza dimostrativa e di comprensione impostando uno dei due come una dimostrazione guidata da completare in modo tale che sia più semplice confrontare i risultati degli allievi. L'item 9 si è dimostrato non affidabile poichè troppo difficile e poco selettivo; oltretutto esso è in stretta correlazione con l'item 7 che pare invece maggiormente affidabile e a cui molti studenti hanno dimostrato di saper rispondere in maniera corretta. E' quindi opportuno testare l'obiettivo di apprendimento voluto in maniera differente oppure pensare di eliminarlo dalla prova e di lasciare la verifica di tale nozione teorica ad un momento successivo della programmazione visto che essa sarà ripreso in modo essenziale e più esplicito e chiaro in seguito.

11 Indicazioni per il recupero e la programmazione successiva

Riconsegnerò la prova corretta agli studenti all'inizio di gennaio: è mia intenzione effettuare la correzione degli esercizi che testano obiettivi differenti dalla conoscenza alla lavagna chiamando coloro che hanno ottenuto un risultato insufficiente e che hanno sbagliato proprio l'esercizio che si sta per correggere. Non ho intenzione di dedicare altre ore per il consolidamento degli argomenti trattati nella prova visto che essi saranno ripresi in maniera essenziale in ciò che segue; ogni volta che tali argomenti serviranno saranno richiamati dall'insegnante anche con domande agli studenti. Gli studenti che lo richiedono saranno interrogati e potranno dimostrare di aver colmato le loro lacune soprattutto in una prova come questa in cui l'obiettivo maggiormente testato era la conoscenza. La prova pone in evidenza lacune di

argomenti pregressi e, insieme ad altre prove, può servire per individuare quegli studenti che necessitano di corsi di recupero pomeridiani al termine del quadrimestre.
Per quel che riguarda la programmazione successiva, essa prevede i seguenti argomenti.

- Esempi di funzioni non-derivabili in un punto: punti angolosi ovvero punti del dominio di una funzione in cui le derivate destra e sinistra esistono finite, ma non coincidono. Significato geometrico dei punti angolosi.
- Teorema fondamentale sulla derivabilità e continuità di una funzione in un punto: se una funzione è derivabile in un punto allora essa è anche continua, ma in generale non è vero il viceversa. Dimostrazione, controesempi ed esercizi per riconoscere se una funzione è derivabile e continua, derivabile, ma non continua o non derivabile e non continua in un punto.
- Teoremi sulla derivata del prodotto e quoziente di funzioni derivabili: dimostrazione, applicazioni (funzioni derivate delle funzioni $f(x) = \text{tg } x$ e $f(x) = \text{ctg } x$) ed esercizi.
- Altri esempi di funzioni non derivabili in un punto (cuspidi e punti di flesso a tangente verticale): definizioni ed esempi. Esercizi per saperli riconoscere e distinguere.
- Punti stazionari ovvero punti in cui la derivata è nulla e quindi la retta tangente al grafico in quel punto è parallela all'asse delle ascisse. Esercizi per sapere individuare i punti stazionari in un grafico.

12 Autoriflessione conclusiva

L'esperienza della costruzione, somministrazione e analisi dei dati della prova stessa è stata istruttiva sotto molto punti di vista. Ero a conoscenza del fatto che una prova di verifica realmente idonea a testare la preparazione di un allievo richiede una fase di progettazione non indifferente; pensavo però che testare obiettivi di apprendimento legati alla conoscenza fosse molto più semplice che valutare obiettivi di apprendimento che implicano l'eseguire e l'applicare, ma l'analisi degli item della mia prova ha fatto emergere come item che testavano obiettivi di apprendimento di quest'ultimo tipo fossero più affidabili dei primi. Da questo fatto ho compreso che anche per item che vogliono testare obiettivi legati alla conoscenza è necessaria una complessa fase di progettazione e ripensamento.
L'analisi degli item permette di eliminare gli item troppo poco affidabili e migliorare così la prova che può essere utilizzata in anni differenti o in classi parallele: in questo modo sono possibili confronti che possono risultare significativi. Un altro fatto che mi ha colpito è stata la media dell'indice di affidabilità che mi sembrava molto bassa; confrontandola con le medie ottenute dagli altri specializzandi ho notato però che anche gli altri avevano ottenuto valori simili ai miei e questo mi è stato di conforto anche perchè ritenevo di avere progettato con accuratezza la mia prova.
Per ciò che riguarda la somministrazione della prova, scriverei al fondo della prova i punteggi

massimi dei singoli item invece che esplicitarli esclusivamente a voce in modo tale che tutti gli studenti possano regolarsi nello svolgimento.