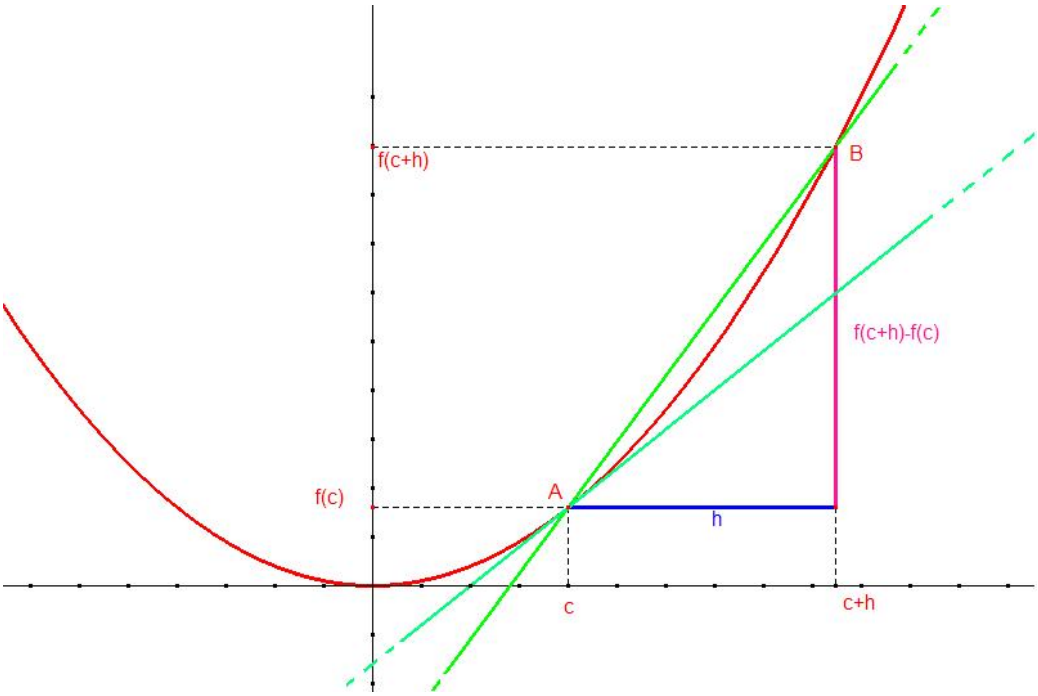
CORRETTORE della PROVA

1. Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, si chiama *derivata della funzione nel punto* c interno all'intervallo il limite, se esiste ed è finito, per h che tende a 0 del rapporto incrementale di f relativo a c e si indica con $f'(c)$:
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$
La derivata di una funzione in un punto c rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa c.

2. Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, e un punto del suo grafico $A = (c; f(c))$, le coordinate del punto B del grafico di f, la cui ascissa è data dalla somma di h con l'ascissa di A, sono: $x_B = c + h, y_B = f(x_B) = f(c + h)$, ossia $B = (c + h, f(c + h))$. La differenza tra l'ascissa di B e quella di A è uguale a $\Delta x = x_B - x_A = h$ ed è detta **incremento della variabile indipendente**, mentre la differenza tra l'ordinata di B e quella di A è uguale a $\Delta y = y_B - y_A = f(c + h) - f(c)$ ed è chiamata **incremento della funzione** f **relativo a** c. Il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ è detto **rapporto incrementale della funzione** f **relativo a** c.



Scrivendo l'equazione della retta passante per i punti A e B (ovvero l'equazione della retta secante il grafico della funzione f nei punti A e B)

otteniamo

$$\frac{y - f(c)}{f(c+h) - f(c)} = \frac{x - c}{c + h - c}.$$

Riscrivendo l'equazione e mettendo in evidenza il coefficiente angolare della retta si ha

$$y - f(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}(x - c)$$

da cui si deduce che il coefficiente angolare della retta secante è pari al rapporto incrementale. Attribuendo all'incremento della variabile indipendente h valori sempre più piccoli, il punto B si avvicina sempre di più al punto A. Quando $h \to 0$ il punto B tende a sovrapporsi al punto A e la retta AB tende a diventare la retta tangente al grafico in A; il coefficiente angolare della secante AB (ovvero il rapporto incrementale) tende allora al coefficiente angolare della retta tangente e quindi il limite del rapporto incrementale al tendere di h a 0 ovvero $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ (che noi abbiamo definito essere la derivata di f nel punto di ascissa c) è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa c.

3.

Funzione	Funzione derivata
$f(x) = k$, con k costante	0
$f(x) = x$	1
$f(x) = x^a$, con $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
$f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$, con $n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$f(x) = \cos x$	$-\sin x$
$f(x) = a^x$, con $a > 0$	$a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	e^x
$f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$	$\frac{1}{x}\log_a e$
$f(x) = \ln x$	$\frac{1}{x}$

4.

Funzione	Funzione derivata
$f(x) = \sin \frac{\pi}{10}$	0
$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 1$	$12x^2 - 4x + 5$
$f(x) = x + \sin x + \cos x$	$1 + \cos x - \sin x$
$f(x) = \frac{2}{x} + 5\ln x - 2e^x$	$-\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x} - 2e^x$

5. • La derivata del prodotto di una costante k per una funzione derivabile $f(x)$ è uguale al prodotto della costante k per la derivata della funzione:

$$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x).$$

Esempi.

$$f(x) = -3 \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = -3 \cdot \frac{1}{x};$$

$$g(x) = \frac{2}{3} \cos x \Rightarrow g'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \sin x.$$

- La derivata della somma algebrica di due o più funzioni derivabili è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni:

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

Esempi.

$$f(x) = x + \sin x \Rightarrow f'(x) = 1 + \cos x;$$

$$g(x) = e^x + \ln x + x^3 \Rightarrow g'(x) = e^x + \frac{1}{x} + 3x^2.$$

6.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{4 + h^2 + 4h - 4}{h} = \lim_{h \to 0} h + 4 = 4.$$

$$g'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} =$$

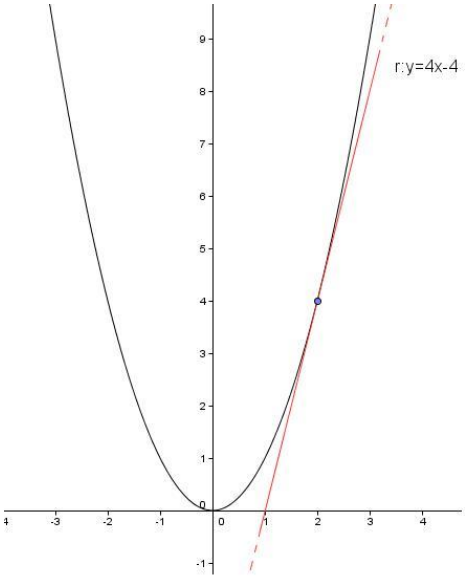
$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1-1-h}{1+h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1+h} = -1.$$

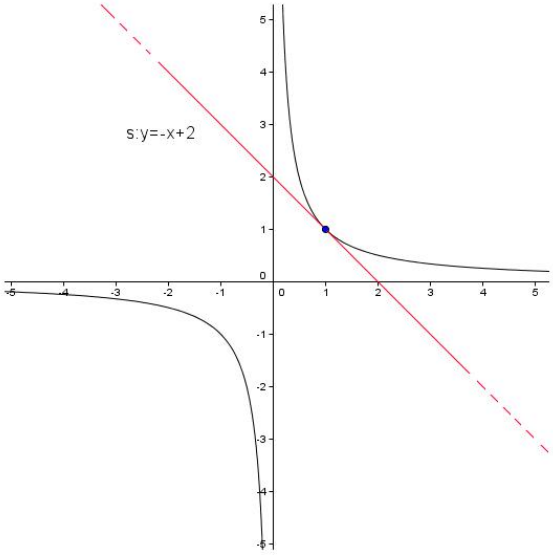
$$h'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h(0+h) - h(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

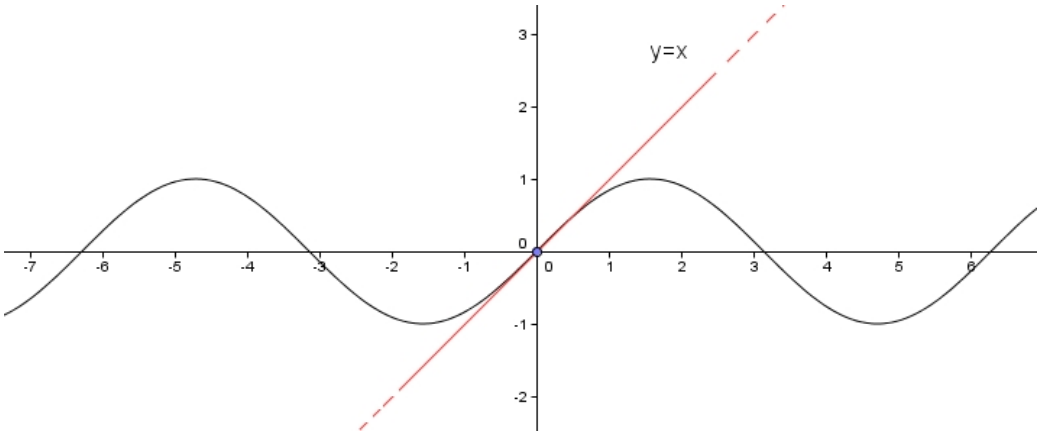
7. E' possibile controllare i risultati ottenuti utilizzando le funzioni derivate delle funzioni date: è sufficiente infatti calcolare il valore delle funzioni derivate nei punti dati. Si ha:

   - $f'(x) = 2 \cdot x \Rightarrow f'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$
   - $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(1) = -1.$
   - $h'(x) = \cos x \Rightarrow h'(0) = 1.$

8.
   - $r : y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow r : y - 4 = 4(x-2) \Rightarrow r : y = 4x - 4.$
   - $s : y - g(1) = g'(1)(x-1) \Rightarrow s : y - 1 = -1(x-1) \Rightarrow s : y = -x + 2.$
   - $t : y - h(0) = h'(0)(x-0) \Rightarrow t : y = x.$







9. La funzione $\cos x$ è la funzione derivata della funzione $f(x) = \sin x$ significa che il valore che la funzione $\cos x$ assume in ogni punto c del dominio è il valore della derivata della funzione $f(x) = \sin x$ nel punto c vale a dire il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sin x$ nel punto c.

10.

$$D(\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(\frac{x+h+x}{2})\sin(\frac{x+h-x}{2})}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = 1 \cdot \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) =$$

$$\cos x$$

dove la seconda uguaglianza è giustificata dalla formula di prostaferesi $\sin p - \sin q = 2 \cdot \cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$, la quarta uguaglianza dal teorema sul prodotto dei limiti e la quinta dal limite notevole $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.